

ISSN 2686-679X

ВЕСТНИК РГГУ

Серия
«Информатика.
Информационная безопасность.
Математика»

Научный журнал

RSUH/RGGU BULLETIN

“Information Science.
Information Security. Mathematics”
Series

Academic Journal

Основан в 2018 г.
Founded in 2018

2
2020

VESTNIK RGGU. Seriya «Informatica. Informacionnaya bezopasnost. Matematika»

RSUH/RGGU BULLETIN. “Information Science. Information Security. Mathematics” Series Academic Journal

There are 4 issues of the printed version of the journal a year.

Founder and Publisher

Russian State University for the Humanities (RSUH)

RSUH/RGGU BULLETIN. “Information Science. Information Security. Mathematics” series is included: in the Russian Science Citation Index; in the List of leading scientific magazines journals and other editions for publishing PhD research findings peer-reviewed publications fall within the following research area:

20.00.00 Informatics

81.03.29 Information security, data protection,

27.00.00 Mathematics

Objectives and areas of research

RSUH/RGGU BULLETIN. “Information Science. Information Security. Mathematics” series publishes the results of research by scientists from RSUH and other universities and other Russian and foreign academic institutions. The areas covered by contributions include theoretical and applied computer science, up-to-date IT, means and technologies of information protection and information security as well as the issues of theoretical and applied mathematics including analytical and imitation models of different processes and objects. Special emphasis is put on articles and reviews covering research in indicated directions in the areas of social and humanitarian problems and also issues of personnel training for these directions.

RSUH/RGGU BULLETIN. “Information Science. Information Security. Mathematics” series is registered by Federal Service for Supervision of Communications Information Technology and Mass Media. 25.05.2018, reg. No. FS77-72977

Editorial staff office: 6, Miuskaya sq., Moscow, Russia, 125993, GSP-3

tel: +7 (916) 250-90-85

e-mail: adkozlov@mail.ru

ВЕСТНИК РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика»

Научный журнал

Выходит 4 номера печатной версии журнала в год.

Учредитель и издатель – Российский государственный гуманитарный университет (РГГУ)

ВЕСТНИК РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика» включен: в систему Российского индекса научного цитирования (РИНЦ); в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по следующим научным специальностям и соответствующим им отраслям науки:

20.00.00 Информатика

81.93.29 Информационная безопасность, защита информации

27.00.00 Математика

Цели и область

В журнале «Вестник РГГУ», серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика» публикуются результаты научных исследований ученых и специалистов РГГУ, а также других университетов и научных учреждений России и зарубежных стран. Направления публикаций включают теоретическую и прикладную информатику, современные информационные технологии, методы, средства и технологии защиты информации и обеспечения информационной безопасности, а также проблемы теоретической и прикладной математики, включая разработку аналитических и имитационных моделей процессов и объектов различной природы. Особое внимание уделяется статьям и обзорам, посвященным исследованиям по указанным направлениям в области социальных и гуманитарных проблем, а также вопросам подготовки кадров по соответствующим специальностям для данных направлений.

ВЕСТНИК РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика» зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций 25.05.2018 г., регистрационный номер ПИ № ФС77-72977.

Адрес редакции: 125993, ГСП-3, Россия, Москва, Миусская пл., 6

Тел: +7 (916) 250-90-85

электронный адрес: adkozlov@mail.ru

Founder and Publisher

Russian State University for the Humanities (RSUH)

Editor-in-chief

V.V. Arutyunov, Dr. of Sci. (Engineering), Russian State University for the Humanities (RSUH), Moscow, Russian Federation

Editorial Board

V.K. Zharov, Dr. of Sci. (Pedagogy), professor, Russian State University for the Humanities (RSUH), Moscow, Russian Federation (*deputy editor-in-chief*)

A.D. Kozlov, Cand. of Sci. (Computer Science), associate professor, Russian State University for the Humanities (RSUH), Moscow, Russian Federation (*executive secretary*)

Sh.A. Alimov, Dr. of Sci. (Physics and Mathematics), professor, academician, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan

M.N. Aripov, Dr. of Sci. (Physics and Mathematics), professor, National University of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan

G.S. Ivanova, Dr. of Sci. (Computer Science), professor, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

O.V. Kazarin, Dr. of Sci. (Engineering), Russian State University for the Humanities (RSUH), Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

V.M. Maximov, Dr. of Sci. (Physics and Mathematics), professor, Russian State University for the Humanities (RSUH), Moscow, Russian Federation

I.Yu. Ozhigov, Dr. of Sci. (Physics and Mathematics), professor, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

E.A. Primenko, Cand. of Sci. (Physics and Mathematics), professor, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

S.M. Sokolov, Dr. of Sci. (Physics and Mathematics), professor, Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow, Russian Federation

Sh.K. Formanov, Dr. of Sci. (Physics and Mathematics), professor, academician, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan

V.A. Tsvetkova, Dr. of Sci. (Engineering), professor, Library for Natural Sciences of the RAS, Moscow, Russian Federation

Executive editor:

A.D. Kozlov, Cand. of Sci. (Computer Science), associate professor (RSUH)

Учредитель и издатель

Российский государственный гуманитарный университет (РГГУ)

Главный редактор

В.В. Арутюнов, доктор технических наук, Российский государственный гуманитарный университет (РГГУ), Москва, Российская Федерация

Редакционная коллегия

В.К. Жаров, доктор педагогических наук, профессор, Российский государственный гуманитарный университет (РГГУ), Москва, Российская Федерация (*заместитель главного редактора*)

А.Д. Козлов, кандидат технических наук, доцент, Российский государственный гуманитарный университет (РГГУ), Москва, Российская Федерация (*ответственный секретарь*)

Ш.А. Алимов, доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Узбекистана, Ташкент, Республика Узбекистан

М.М. Арипов, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Республика Узбекистан

Г.С. Иванова, доктор технических наук, профессор, Московский государственный университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

О.В. Казарин, доктор технических наук, Российский государственный гуманитарный университет (РГГУ), Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (МГУ), Москва, Российская Федерация

В.М. Максимов, доктор физико-математических наук, профессор, Российский государственный гуманитарный университет (РГГУ), Москва, Российская Федерация

И.Ю. Ожигов, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (МГУ), Москва, Российская Федерация

Э.А. Применко, кандидат физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (МГУ), Москва, Российская Федерация

С.М. Соколов, доктор физико-математических наук, профессор, Институт прикладной математики им. М.И. Келдыша РАН, Москва, Российская Федерация

Ш.К. Форманов, доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии наук Узбекистана, Ташкент, Республика Узбекистан

В.А. Цветкова, доктор технических наук, профессор, Библиотека по естественным наукам РАН, Москва, Российская Федерация

Ответственный за выпуск:

А.Д. Козлов, кандидат технических наук, доцент (РГГУ)

Contents

Information Science

| | |
|--|---|
| <i>Y.V. Gorchakov, Y.V. Taratuhina</i> Cross-cultural and cognitive aspects of the semiotic information interpretation | 8 |
|--|---|

| | |
|--|----|
| <i>N.V. Silakov, K.L. Tassov</i> Overview of the text area detection algorithms in video stream frames | 27 |
|--|----|

Information Security

| | |
|---|----|
| <i>V.V. Arutyunov</i> Scientometric indicators for leaders in the scientific research of the information security | 46 |
|---|----|

Mathematics

| | |
|---|----|
| <i>N.V. Grishina</i> Abel Prize as the flagship of world math advances | 57 |
|---|----|

| | |
|---|----|
| <i>M.S. Zemlyak, N.B. Victorova</i> Decoherence-free storage information space | 72 |
|---|----|

| | |
|---|----|
| <i>Sh.G. Kasimov, M.M. Babaev</i> On the solvability of a mixed problem with degree Laplace operators with nonlocal boundary conditions | 85 |
|---|----|

Содержание

Информатика

| | |
|---|---|
| <i>Я.В. Горчаков, Ю.В. Таратухина</i> Кросс-культурные и когнитивные аспекты интерпретации семиотической информации | 8 |
|---|---|

| | |
|--|----|
| <i>Н.В. Силаков, К.Л. Тассов</i> Обзор алгоритмов обнаружения текстовых областей на кадрах видеопотока | 27 |
|--|----|

Информационная безопасность

| | |
|--|----|
| <i>В.В. Арутюнов</i> Наукометрические показатели исследователей-лидеров научной деятельности в области информационной безопасности | 46 |
|--|----|

Математика

| | |
|--|----|
| <i>Н.В. Гришина</i> Премия Абеля как флагман мировых достижений в области математики | 57 |
|--|----|

| | |
|---|----|
| <i>М.С. Земляк, Н.Б. Викторова</i> Пространство для хранения информации, свободное от декогерентности | 72 |
|---|----|

| | |
|--|----|
| <i>Ш.Г. Касимов, М.М. Бабаев</i> О разрешимости смешанной задачи с помощью оператора Лапласа с нелокальными граничными условиями | 85 |
|--|----|

Кросс-культурные и когнитивные аспекты интерпретации семиотической информации

Ярослав В. Горчаков

*Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»,
Москва, Россия, ygorchakov@hse.ru*

Юлия В. Таратухина

*Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»,
Москва, Россия, jtaratuhina@hse.ru*

Аннотация. В настоящей работе авторами рассматриваются кросс-культурные и когнитивные аспекты передачи семиотической информации, а именно то, каким образом происходит обмен и интерпретация информации в контексте бизнес-процессов представителями разных культурных групп. В статье затрагиваются вопросы субъективности восприятия информации, изобразительной эффективности моделей бизнес-процессов и их информативного содержания и то, каким образом культурные факторы влияют на сложность или простоту восприятия моделей. Исследование включает модели и рисунки в качестве иллюстраций процессов. На конкретных примерах приводится семантическая специфика некоторых нотаций описания бизнес-процессов, языка пиктограмм, ассоциативных рисунков. Предложена гипотеза о наличии взаимосвязи и влияния определенных объективных и субъективных факторов на семиотическую специфику бизнес-процессов и возможности управления данными факторами для более эффективного решения соответствующих бизнес-задач. Для более четкого понимания предметной области рассмотрены понятия знания, информации и данных применительно к тематике исследования. Авторы отметили общую цель использования моделей процессов в виде нотаций и схематичных изображений процессов в виде рисунков и пиктограмм при различиях в уровнях смыслового обеспечения и эмоциональной нагрузки на основе идентичных простых когнитивных механизмов: зрительного ассоциативного ряда, текста, расположения объектов. Иссле-

дование может быть полезным для проектирования культурно- и контекстно-зависимых средств коммуникации как повелительно-побудительного свойства (плакаты, указатели), так и описательного (информация о процессах, инструкции, сообщения и др.).

Ключевые слова: культуры высокого контекста, культуры низкого контекста, бизнес-процессы, семиотика, нотация, модель процесса, пиктограмма, когнитивная психология, восприятие, семантика

Для цитирования: Горчаков Я.В., Таратухина Ю.В. Кросс-культурные и когнитивные аспекты интерпретации семиотической информации // Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2020. № 2. С. 8–26. DOI: 10.28995/2686-679X-2020-2-8-26

Cross-cultural and cognitive aspects of the semiotic information interpretation

Yaroslav V. Gorchakov

*National Research University Higher School of Economics,
Moscow, Russia, ygorchakov@hse.ru*

Yulia V. Taratuhina

*National Research University Higher School of Economics,
Moscow, Russia, jtaratuhina@hse.ru*

Abstract. In this paper the authors consider the cross-cultural and cognitive aspects of the semiotic information transmission, namely, how information is exchanged and interpreted by representatives of different cultural groups in the context of business processes. The article deals with the issues of subjective perception of information, the visual effectiveness of business process models and their informative content, and the way cultural factors affect the complexity or simplicity of models' perception. The study includes models and drawings as illustrations of processes. The semantic content of some notations for describing business processes, the pictogram language, and associative drawings are given on specific examples. A hypothesis is proposed about the relationship and influence of certain objective and subjective factors over the semiotic content of business processes and the ability to manage those factors for more effective solutions for better addressing the relevant business challenges. The concepts of knowledge, information and data are considered in relation to the research topic for a clearer understanding of the subject area. The authors note the general goal of using process models in the form of the processes notations and schematic images in the form of drawings and pictograms with differences in the levels of semantic support and emotional context based on identical simple cognitive mechanisms: visual associative series, text, and the location of objects. The research can be useful

for the design of cultural and context-dependent types of communication, both the imperative and motivational (posters, signs) and also the descriptive (information about processes, instructions, messages, etc.).

Keywords: high context cultures, low context cultures, business processes, semiotics, notation, process model, pictogram, cognitive psychology, perception, semantics

For citation: Gorchakov, Y.V., Taratuhina, Y.V. (2020), “Cross-cultural and cognitive aspects of the semiotic information interpretation”, RSUH/RGGU Bulletin. “Informatics. Information security. Mathematics” Series, no. 2, pp. 8–26, DOI: 10.28995/2686-679X-2020-2-8-26

Введение

Семи́отика или семиоло́гия (греч. σημειωτική < др. – греч.σημεῖον «знак; признак») – наука, исследующая свойства знаков и знаковых систем. Согласно Ю.М. Лотману, под семиотикой следует понимать науку о коммуникативных системах и знаках, используемых в процессе общения.

Семиотический подход в изучении коммуникации – это понимание коммуникации, в первую очередь, как процесса обмена знаками, знаковыми системами и языками, как одним из видов знаковых систем. В рамках семиотического подхода коммуникация – это в том числе процесс возникновения понимания и рождения новых значений. Данная точка зрения может представлять интерес особенно в поле межкультурных коммуникаций, когда у коммуникантов есть ограниченное количество общих кодов [Таратухина, Цыганова 2019].

В контексте исследования процессов межкультурных коммуникаций в практически-прикладном ключе нам небезынтересно будет рассмотреть следующие вопросы, легшие в основу семиотического подхода:

- Какова структура знаковой деятельности субъектов коммуникации?
- Что такое «код» и какие основные типы кодов используются для организации коммуникации в различных ситуациях?
- Каковы прикладные аспекты использования семиотического подхода в межкультурной коммуникации (на примере фрагментов моделей нотаций моделирования процессов и инструкций)?

Знаки немислимы не только вне контекста, но и вне интерпретации. Особенно это может быть заметно в разных культурах (на примере невербального общения, когда один и тот же знак может иметь разные значения), или в случае, когда одно и то же явление

может обозначаться разными знаками. По сути, это часто составляет основу межкультурных затруднений в коммуникации.

В отличие от естественного языка коды вторичных моделирующих систем (например, иконического языка) различны.

«Семиотический шум», возникающий в результате несовпадения интерпретаций и различной прагматики, может блокировать канал коммуникации или создать ему помехи. Коммуникация всегда есть акт перевода: адресат интерпретирует посланное сообщение сквозь призму лишь частично разделяемого с ним кода [Лотман 2000].

Кросс-культурный метод должен осуществляться с учетом двух подходов: один из них назван этическим (*etic*), другой – эмическим (*emic*). Первый подход основывается на изучении общего в различных культурах, а второй стремится к описанию уникальных, специфичных для каждой культуры моделей поведения [Hall 1960], [Hofstede 1980], [Nisbett 2003].

При этом использование этического и эмического подходов в комплексе до сих пор слабо выражено, например, в средствах визуализации информации в управлении, в том числе веб-формах и приложениях, а также в инструментах ИТ-обеспечения управления организацией и коммуникаций с клиентами.

Тематика использования семиотики в бизнес-процессах, особенно в их визуальном ряде – моделях, широко представлена в различных публикациях, касающихся разработки прикладного пользовательского программного обеспечения и интерфейсов человеко-машинных систем.

В начале XXI в. широко распространилось моделирование бизнес-процессов в виде нотаций (нотация – принятый в рамках той или иной методологии способ описания предметной области моделирования, содержащий определенный набор графических объектов и связей между ними¹), представляющих собой стандартизированные типовые символы для обозначения процесса на уровне детализации, позволяющем идентифицировать события, действия, участников, информационные ресурсы и др.

В частности, популярными стали нотация EPC (Event-driven Process Chain) методологии ARIS (Architecture of Integrated

¹ Наше определение нотации связано в большей степени именно с моделированием бизнес-процессов. Другие определения могут быть более краткими и обобщенными, см., например: Нотация – система условных обозначений, принятая в какой-либо области знаний или деятельности [Электронный ресурс] // Академик. URL: <https://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/284980> (дата обращения 10 мая 2020).

information Systems)² и BPMN (Business Process Model and Notation) консорциума Object Management Group (OMG)³. Версия BPMN2.0. стала основой для создания автоматизации процессов в виде исполняемых приложений, а рынок BPM решений в РФ показывает взрывной рост⁴.

Среди других графических методов представления процессов также широко используются блок-схемы Flowchart, унифицированный язык моделирования UML (Unified Modeling Language) и другие нотации и модели, включая специфические, разработанные как стандарт графического описания деятельности в той или иной компании.

Применительно к тематике нашего исследования интересными являются нотации и модели, использующие рисунки и схематичные изображения, являющиеся упрощенным аналогом объектов реального мира. В частности, многие сетевые транснациональные компании, занимающие большую долю рынка мебели и хозяйственно-бытовых товаров, используют пиктограммы в инструкциях по применению того или иного товара.

Этот метод позволяет избегать перевода инструкций на различные языки – посредством простых интуитивно понятных (большинству типовых покупателей таких товаров) картинок, представленных в небольшой брошюре на 5 – 10 листов, любой пользователь (покупатель, клиент) может, например, самостоятельно собрать мебель.

Однако практика использования разнообразных способов визуализации процессов и неоднозначность восприятия символов в том или ином контексте субъектами-носителями различных культур ведет, с одной стороны, к ошибкам в бизнес-моделировании (вызванным, например, индивидуальными культурно-когнитивными особенностями автора модели), и к ограничениям объективного характера, связанным с жесткими требованиями использования определенного набора графических элементов, являющихся спецификой и идентичностью той или иной нотации, – с другой. Невозможность «выйти за рамки» нотации проявляется в случаях,

² Разработчик программного продукта ARIS – компания Software AG [Электронный ресурс]. URL: <https://www.softwareag.com> (дата обращения 10 мая 2020).

³ Object Management Group [Электронный ресурс]. URL: <https://www.omg.org> (дата обращения 10 мая 2020).

⁴ CNEWS [Электронный ресурс] // Российский рынок BPM показал взрывной рост. URL: https://www.cnews.ru/reviews/rynok_bpm_2019/articles/rossijskij_rynok_bpm_pokazal_vzryvnoj (дата обращения 10 мая 2020).

когда методология моделирования входит в пакет приобретаемого программного обеспечения и автоматически включает соответствующие модели.

При этом актуальные тренды в области ИТ-обеспечения деятельности как на основе онлайн-платформ, так и офлайн, демонстрируют конвергенцию BPM-систем и систем групповой работы класса workflow, кейс-менеджмента, ИТ-решений управления задачами и инструментов корпоративной коммуникации. В то же время интернет становится средством информирования клиентов о специфике разнообразных товаров и услуг, а значит, возрастает потребность в простых и универсальных средствах семиотического обеспечения.

Кроме того, в последнее время стали появляться ИТ-инструменты автоматизации и роботизации бизнес-процессов, в которых интерфейс экранных форм сведен к минимуму и необходим только для отчетов и визуализации различных показателей деятельности. Однако подобные интерфейсы в данном исследовании мы не рассматриваем по причине ограниченности объема статьи.

В пользу актуальности данного исследования также служит малое количество публикаций, посвященных именно семиотическому и семантическому анализу применительно к когнитивно-психологическим аспектам в сфере прикладного программного обеспечения в целом и в моделировании бизнес-систем (т. е. различных организаций) в частности.

Исходя из указанных выше аспектов, мы выбрали объектом исследования клиент-ориентированные сферы деятельности, а предметом – семиотические аспекты получения информации о продукте и визуальную поддержку соответствующих бизнес-процессов.

Соответственно, в данной статье мы поставили целью выявить а) кросс-культурные когнитивные факторы, влияющие на качество восприятия информации о продукте клиентами (формирующие субъективную ценность продукта для потребителя) и б) когнитивно-зависимые аспекты решения задач в различных бизнес-процессах, влияющие на представление о бизнес-процессе его участников, а значит, и на качество управления этим процессом. С точки зрения процессно-ориентированной терминологии ИТ основное внимание уделено внешним интерфейсам процесса (его основным входам и выходам, связанным с предшествующими и последующими процессами) и внутренним интерфейсам, осуществляющим передачу информации внутри процесса.

Для большей практической направленности исследования мы сформулировали гипотезу о наличии взаимосвязи и влияния определенных объективных и субъективных факторов на семиоти-

ческую специфику бизнес-процессов и возможности управления данными факторами для более эффективного решения соответствующих бизнес-задач.

Поскольку данное исследование связано с интерпретацией символов, мы также приводим некоторые термины в конкретных формулировках, чтобы не было путаницы и неоднозначного толкования: данные – то, что дано. «*Данные* суть факты, идеи, сведения, представленные в знаковой (символьной) форме, позволяющей производить их передачу, обработку и интерпретацию (т. е. толкование, объяснение, раскрытие смысла), а *информация* – это смысл, который человек приписывает данным на основании известных ему правил представления в них фактов, идей, сообщений. Структурированная информация, т. е. связанная причинно-следственными и иными отношениями и образующая систему, составляет *знания*» [Гиляревский 2003]. В данном исследовании мы подразумеваем семантическую информацию, т. е. несущую определенный смысл, передаваемый в том числе в форме условных графических символов.

Говоря о бизнес-процессах, мы относим первую составляющую этого словосочетания к основному переводу слова «business» как дело, любая деятельность, т.е. бизнес-процессы – это процессы любой деятельности, как коммерческой, так и некоммерческой.

При этом, поскольку основные свойства бизнес-процесса, по сути, ничем не отличаются от процесса в целом (например, в части наличия входов и выходов, поставщиков и потребителей результатов, возможности определить эффективность, гибкость и т. п. – отличия только в переменных, по модели SIPOC)⁵, мы далее используем оба понятия как идентичные.

Факторы, влияющие на качество восприятия моделей бизнес-процессов в определенных нотациях

Поскольку, как указывалось выше, к настоящему моменту существует большое количество разнообразных методологий и ИТ-инструментариев моделирования бизнес-процессов, мы выбрали в качестве инструментария несколько популярных нота-

⁵ SIPOC – аббревиатура от Supplier (Поставщик), Input (Вход), Process (Процесс), Output (Выход), Customer (Потребитель), с помощью этой модели можно идентифицировать практически любой процесс. iSixSigma [Электронный ресурс]. URL: <https://www.isixsigma.com/tools-templates/sipoc-copis/identifying-high-level-requirements-using-sipoc-diagram> (дата обращения 10 мая 2020).

ций, а также их составляющие в виде форм документов, файлов, экранных интерфейсов и т. п.

Например, в практике учебного процесса нашего университета используются такие нотации, как EPC и BPMN, они же достаточно часто являются основой описания процессов в проектах по оптимизации деятельности различных организаций, в которых нам довелось неоднократно принимать участие. Важно отметить, что мы не затрагиваем маркетинговых составляющих и не критикуем ценность данных нотаций как продукта. Учитывая необходимость соблюдения авторских прав на изображения, мы ограничиваемся условными символами, а не вариантами их дизайна, представленными в том или ином конкретном программном обеспечении.

Мы надеемся, что данное исследование будет воспринято не как критика, а как возможность улучшения качества различных ИТ-продуктов и информационного сопровождения различной продукции.

Также ввиду ограниченности объема данной статьи мы не будем останавливаться на описании самих методологий моделирования, за исключением тех их аспектов, которые непосредственно влияют на информационное наполнение моделей и являются неотъемлемой частью описания любой деятельности как сложной системы.

В моделях, построенных на основе графических объектов-символов – условных «аналогов» объектов реального мира, каждый объект является сущностью со своими уникальными аспектами проявления (они обычно называются либо атрибутами, либо параметрами), свойствами и специфическими связями с другими объектами.

Необходимо отметить, что сами объекты нотации, в зависимости от разработчиков поддерживающего ее программного обеспечения, могут содержать дополнительные изображения (знаки) в виде стрелок, кружков и других пиктограмм, нанесенных непосредственно на каждый объект.

Однако все приведенные выше категории пользователей модели не обратили внимание на эти знаки, полностью их игнорируя. На наш взгляд, это вызвано когнитивной особенностью: а) сами изображения на объектах являются мелкими и располагаются, как правило, в углу основного объекта; б) они весьма условны и являются лишь элементом дизайна, но не выполняют информационную функцию.

В этой связи мы их не приводим в модели, а объекты отображаем просто геометрическими фигурами в том виде, в каком они присутствуют в любом программном обеспечении, использующем данную нотацию, поскольку в первоначальном виде нотация содержала именно такой вид объектов [Шеер 2000].

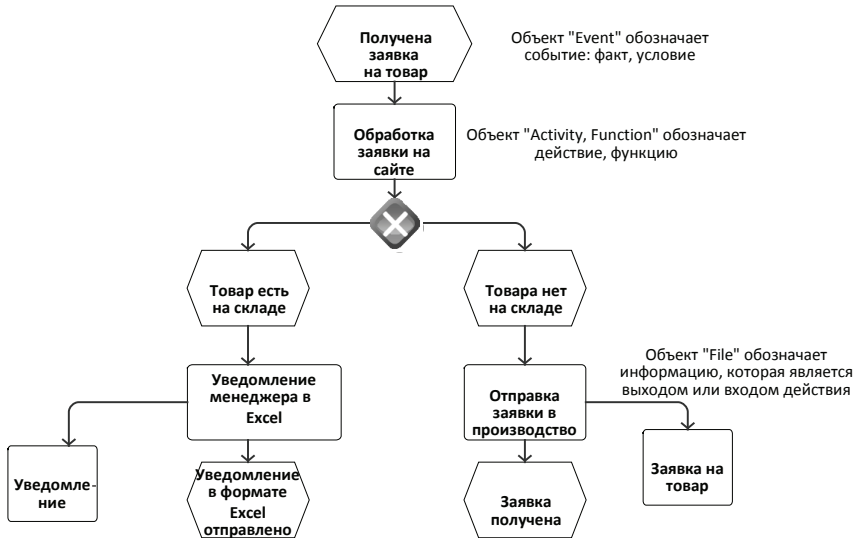


Рис. 1. Фрагмент модели в нотации EPC

Авторитетные специалисты в области моделирования отмечают, что «модель EPC является наиболее информативной и удобной при описании детальных бизнес-процессов компании» [Каменнова, Крохин, Машков 2018].

В качестве первого примера возьмем одну из типичных ситуаций (рис. 1): в компании заявка на товар обрабатывается автоматически и, в зависимости от типа заявки, процесс разделяется на два сценария.

В модели даны краткие комментарии к основным объектам, информирующие пользователя об их смысловом содержании. Один сценарий развивается в случае наличия товара на складе, а другой – при его отсутствии. Модель была составлена менеджером сайта, который отвечает за обработку заявок.

Мы провели эксперимент: предложили эту модель а) другим сотрудникам (частично – участникам проектной команды), которые знали процесс и методологию моделирования в данной нотации; б) людям вне компании (проекта), которые не знали процесс, но знали методологию моделирования в данной нотации; в) сотрудникам, которые знали процесс, но не знали методологию моделирования в данной нотации; г) студентам старших курсов бакалавриата, которые интерпретировали модель и процесс как задание.

Кроме полной версии модели данного процесса (далее – модель «Обработка заявки»), для сравнения были предложены еще две

модели: процесса покупки товара онлайн (в интернет-магазине, далее – «Онлайн-покупка») и процесса поступления на работу (далее – «Оформление на работу»). Это было сделано с целью выявления зависимости восприятия модели от роли, респондент в трех вариантах воспринимал модель по-разному: как участник «изнутри» компании, как удаленный покупатель и как поступающий на работу.

Для исследования были составлены вопросы анкеты.

Вопрос № 1 (общий): «Корректно ли составлена модель?» Вопрос сформулирован именно так по причинам выявления мнений, наиболее характерных для всех ответов, а также для идентификации контекста самого понятия «корректность».

Вопрос № 2: «Какая часть модели наиболее сложна для восприятия ее как носителя информации о процессе?» – вопрос сформулирован таким образом для выявления проблемных объектов и их сочетания в когнитивном аспекте.

Вопрос № 3: «Как (можно ли, нужно ли) проще смоделировать такой процесс?» – для выяснения степени объективности: чем больше количество одинаковых или похожих по смыслу ответов, тем ответ объективнее. Принцип простого большинства выбран по причине наиболее характерных, типовых мнений; на их основе позднее будет создаваться типовая модель, пригодная для восприятия большинства пользователей. Всем категориям пользователей моделей и респондентов также задавался дополнительный вопрос № 4 на протяжении всего эксперимента: «Как вы считаете, можно было бы описать данный, подобный или другие бизнес-процессы с помощью картинок, пиктограмм и других упрощенных способов визуализации?»

Мы намеренно не делали опрос в виде теста с вариантами ответов, поскольку в данном эксперименте необходимо было выявить именно особенности когнитивно-культурных факторов, влияющих на качество использования модели процесса. Варианты ответов в тесте были бы «подсказкой»: респонденты пытались бы «угадать» «правильный» ответ, как это часто бывает при использовании тестов.

В результате обработки ответов выяснилось следующее.

1. Обнаружилась четкая *корреляция между типом бизнес-процесса и восприятием описывающей его модели*: чем процесс более «корпоративный», мало относящийся к личности респондента, тем более однозначно воспринимается модель, т. е. большинство ответов на вопрос № 1 совпадают.

Например, процесс «Обработка заявки» большинство всех категорий респондентов назвало «в целом корректным», замечания относились в основном к внешнему виду объектов, их распо-

ложению относительно друг друга, связям между ними, цветовому форматированию.

Внимание при этом больше направлено на весь процесс (соответственно, на всю модель), а не на отдельные объекты. Как субъект (тот, кто получает предпочтения и в отношении кого понимается эффективность) большинство респондентов логично выбирает саму организацию.

И наоборот, процесс, в котором больше задействованы субъективные ощущения и опыт (особенно «Оформление на работу»), вызывает больше эмоциональных реакций, а внимание сосредоточено на объектах, отражающих роли и взаимодействие в процессе. Такой процесс большинством назван как некорректный. Соответственно, и субъект у большинства респондентов в этом случае – физическое лицо, например, кандидат на вакансию (повидимому, отождествляемый с самим респондентом), а в качестве значимых интерфейсов для эффективности процесса преобладает указание на формулировку текстов сообщений, название функций и бизнес-ролей.

2. Ответ на вопрос № 2 о сложности восприятия модели выявил следующую закономерность: у респондентов, хорошо знающих методологию, но по каким-то причинам предпочитающих другие нотации, негативно отмечалась именно исследуемая нотация.

Но это вполне ожидаемый результат, и мы его не учитываем как субъективный. Более значимым оказалось мнение, что наличие цветов, соответствующих тем или иным объектам в нотации, гораздо важнее, чем их форма. То есть, например, зеленый цвет всех объектов типа «Функция, действие» и розовый цвет объектов типа «Событие» гораздо легче воспринимаются этой категорией респондентов, чем их бесцветные аналоги.

3. Достаточно неожиданными оказались ответы на вопрос № 3 о возможности проще смоделировать процесс – тут четко проявились возрастные предпочтения: у людей среднего и особенно старшего возраста предложения сводились к описанию действий пунктами и нумерованными списками, а у молодых – к выбору пиктограмм.

4. Ответ на четвертый вопрос обычно утвердительный, при этом большинство опрошенных отмечало необходимость уточнения специфики пиктограмм и создания соответствующего глоссария (тезауруса), справки или памятки о значении тех или иных символов.

Факторы, влияющие на качество восприятия изображений бизнес-процессов в пиктографическом и аналоговом вариантах

Исследуя культурные различия, Р. Нисбетт [Nisbett 2003] выделил несколько факторов, различающихся в зависимости от культурной принадлежности и оказывающих влияние на поведение индивидов: *на Востоке это «внимание к полю», а на Западе – это «внимание к основным объектам»*. Автор проводил ряд экспериментов с американскими и японскими пользователями, в результате которых выяснилось, что японцы обращают внимание на свойства окружающего фона примерно на 70% чаще американцев, хотя и те и другие были одинаково склонны упоминать детали.

Кроме того, японцы почти в два раза чаще отмечали взаимосвязи и отношения. Нисбетт [Nisbett 2003] увидел корни этих различий в когнитивно-семиотических механизмах, унаследованных либо от холистической (древнекитайской), либо от аналитической (древнегреческой) систем познания мира.

Также, согласно исследованиям Г. Хофстеде [Hofstede 1980], можно отметить, что азиаты больше склонны к восприятию целостной картины, преимущественно опираясь на «диалектические» и эмпирические аспекты, в то время как европейцы предпочитают строгую каталогизацию и сохранение формальной структуры.

Таким образом, нам представляется важным здесь выделить следующие аспекты.

- Тип и содержание информации (культурно-специфичные параметры).
- Структура и последовательность расположения элементов, количество и детальность элементов в поле восприятия – прагматическая специфика (то, для чего, например, предназначены в первую очередь модели бизнес-процессов).
- Семантический анализ высказываний и профессиональной терминологии – инструкции, подсказки, названия элементов системы и их прагматическая адекватность.
- Приемы невербального кодирования в виде иконок, сигналов, цветовых изображений.

Представители разных культурных групп могут применять различные стратегии работы с информацией. Например, в культурах с высокой степенью избегания неопределенности (по Хофстеде) чаще проявляется тенденция принимать решения, основанные на репрезентативности.

Эта тенденция касается и взаимодействия пользователя с визуальным материалом. То есть в дополнение к теоретической информации нужны графические приложения в форме презентаций,

макетов и т. д. Представители высококонтекстных культур [Hall 1960] чаще всего предпочитают описательное фактическому, в то время как жители стран с высоким индексом избегания неопределенности стремятся получить исчерпывающую информацию. То есть должны быть предложены различные источники информации – не только текст, но и визуальный ряд.

Не раз отмечалась взаимосвязь культурных факторов и структуры и навигации пользовательских интерфейсов [Таратухина, Цыганова, 2018]. Например, для немецкого сайта (как и для большинства европейских форм репрезентации контента) характерна сдержанная, четкая, выдержанная дизайнерская манера, спокойная цветовая гамма, неперегруженность страницы, отличный баланс между эстетикой и функциональностью.

Для китайского сайта (как и для большинства азиатских) характерны разнообразная цветовая гамма (около 7 цветов), большое количество иероглифики. Следует заметить, что восточная идеографическая символика не всегда понятна представителям Запада. Это отражается в навигации, дизайнерском стиле, цветовой гамме, характеристиках шрифта, архитектонике и структуре текста и т. д. Перегруженность пространства информацией характерна для высококонтекстных азиатских культур, но совершенно нехарактерна для низкоконтекстных западных культур, поэтому зачастую раздражает и отвлекает внимание их представителей.

Поскольку восприятие информации у разных культур отличается в зависимости от специфики языка и традиции интерпретации сообщений, некоторые организации, работающие на глобальном уровне, решают эту проблему «подстройкой» своей рекламной и регламентирующей документации (контактирующей с клиентами) под привычный вид. Можно сказать, коммуникация в этом варианте становится национально-ориентированной.

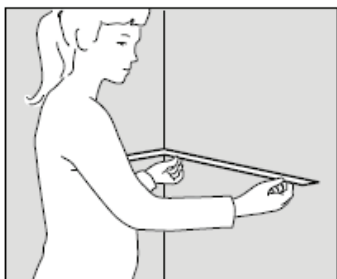
При этом для представителей любой культуры универсальным когнитивным принципом является «эффект фрейминга» [Tversky, Kahneman 1981] – предсказуемое изменение предпочтений в интерпретации информации, когда одна и та же проблема сформулирована по-разному. Зависимость предпочтений от постановки задач является серьезной проблемой как для теории рационального выбора, так и для теории управления.

Поэтому шаг вперед в развитии методов визуализации информации, в том числе технологических процессов, связан с принципиально другим подходом – созданием универсального языка, использующего общие для всех людей образы-паттерны.

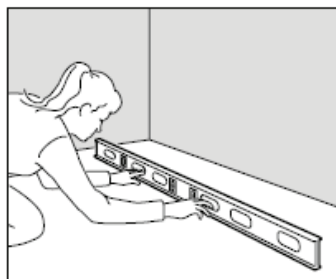
В клиент-ориентированных компаниях и организациях, как коммерческих, так и некоммерческих, для иллюстративного наполнения различных процессов и действий, которые нужно выполнить

клиенту для достижения определенных целей или задач, применяют, по сути, два вида изображений: аналоговые рисунки или фотографии и пиктограммы – условные обозначения и знаки, которые должны влиять на интуитивное восприятие клиента и предопределять выбор его решений и действий.

Необходимо учесть, что для организации она сама является субъектом, а клиент – объектом, который должен выполнить соответствующие действия. Однако для клиента, который стремится достигнуть какой-либо цели, он сам является субъектом, а организация – объектом, посредством которой эта цель может и должна быть достигнута.



Подготовьте помещение: выровняйте стены, пол и потолок. Для выравнивания углов используйте строительный угольник, а стен – спиртовой уровень



Обязательно отметьте самую высокую точку пола и обозначьте углы, которые отклоняются от 90 градусов

Рис. 2. Часть процесса в простом аналоговом рисунке с текстовым сопровождением⁶

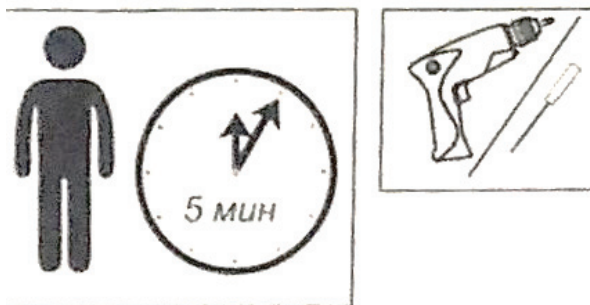


Рис. 3. Часть процесса в виде пиктограммы – условное обозначение

⁶ СБОРКА ДОСТАВКА [Электронный ресурс]. URL: <http://gruzsd.ru/articles/instruksiya-po-sborke-kuhni-ikea> (дата обращения 04 мая 2020)

И в первом, и во втором вариантах иллюстративное наполнение инструкций часто сопровождается одобрениями или неодобрениями правильных или неправильных действий в виде пиктограмм-«смайликов».

На наш взгляд, первый вариант (рис. 2) отличается большей «контекстностью», поскольку содержит картинку с гендерной интерпретацией, что в разных культурах может восприниматься по-разному. Например, использование такого рисунка для потребителей в исламских странах может вызвать негативную реакцию из-за образа женщины с открытой современной прической. Само же содержательное наполнение второй части первого варианта неоднозначно по причине малой информативности: у потребителя может возникнуть вопрос относительно сути предписанного действия, а поясняющий текст (который по этой причине необходим) практически не связан с самой картинкой.

Второй вариант (рис. 3) в виде пиктограммы, наоборот, более универсален и не содержит эмоциональных культурно-зависимых интерпретаций. При этом в подобных пиктограммах важным является дополнительное графическое содержание в виде связанных рисунков, разъясняющих символы с минимумом текста.



Рис. 4. Комбинированный «текст-ассоциативный рисунок»⁷

⁷ Gorodor [Электронный ресурс]. URL: <https://vologda-poisk.ru/advices/vydacha-gradostroitelного-plana-zemelnного-uchastka> (дата обращения 10 мая 2020).

В данном примере (рис. 4) мы видим описание шагов некоторого процесса, но информационное наполнение по ассоциативному ряду когнитивно строится на «ступенях восхождения» к цели (эксплуатируется «желание» человека достигнуть цели) с изображениями эмоциональных состояний «условного» человека: на первом шаге – смущение, на третьем – активное действие, на пятом – радость результата. Однако вторая «ступень» осталась без графики (по-видимому, не нашлось схематичной ассоциации состояния поиска), как и четвертая (функция отправления документа или файла не нашла отображения, хотя это можно было сделать, например, в виде компьютера и т. п.). Государственный герб слева подчеркивает официальность процесса («высокий» контекст здесь налицо), а название сайта справа и заголовок с названием процесса удачно, на наш взгляд, акцентируют внимание на его сути («низкий» контекст).

Таким образом, приведенные примеры – от модели процессов в виде нотаций до схематичных изображений различных процессов в виде рисунков и пиктограмм используются в практически одинаковых целях, но содержат разный уровень смыслового обеспечения и эмоциональной нагрузки при использовании схожих когнитивных механизмов: зрительного ассоциативного ряда, текста, расположения объектов. Соответственно, способ семиотического отображения процессов в разных случаях выбирается не на основе какого-либо общего подхода, а хаотически, исходя из предпочтений авторов.

Заключение

Результаты исследования привели к следующим выводам.

1. Субъективность восприятия информации зависит не от модели процесса или его аналогового рисунка, а от а) эмоционального состояния субъекта, воспринимающего данное изображение, и этот фактор очень сложно избежать или управлять им, и б) его вовлеченности в моделируемую предметную область (знание специфики процесса, специфики нотации, опыт применительно к описываемой предметной области) – этот фактор мы считаем управляемым в достаточной степени.

2. Когнитивная эффективность модели, представленной в нотации ВРМН (в данной статье мы ее не приводили ввиду ограниченности объема), в целом выше «Цепочек событий» ЕРС, поскольку матричное изображение горизонтальных ролей-«дорожек» сразу привлекает внимание к бизнес-роли и выполняемым ею действиям, взгляд обращается на каждую дорожку, визуальную отделенную

линиями, что «обновляет» внимание. Однако событийные цепочки более приемлемы в случаях, когда нужно наглядно представить не роли, а именно факты и интерфейсы – входы и выходы функций. В целом модели с большим количеством объектов, располагающихся вертикально в виде цепочек, по отзывам их потребителей, вызывают более быструю усталость и снижение когнитивной функции, чем матрично-горизонтальные.

3. Информативное содержание моделей в определенных нотациях воспринимается лучше, если они имеют цветное наполнение. При этом цветное многообразие рисунков и пиктограмм отвлекает внимание от сущности описываемой области. Оптимальный вариант для пиктограмм: два (черный и белый с оттенками серого) или максимум три цвета (с добавлением голубовато-серых оттенков) рисунка или пиктограммы. При этом чем моложе пользователь модели, тем больше внимания он уделяет цвету как значимому аспекту: многие студенты сразу обращали внимание на обесцвеченные модели и часто заменяли цвета на компьютере даже не на предписываемые методологией, а на свои собственные.

4. У носителей культур «высокого контекста» намного больше сложностей в восприятии модели вызывает название объектов-исполнителей (например, менеджер, директор), а в рисунках-пиктограммах – изображение (например, кто именно и как представлен, пол – мужчина или женщина, выражение лица). При этом рекомендации по безопасности или предупреждения зачастую игнорируются.

5. У носителей культур «низкого контекста» внимание направлено на текст функций и степень детализации информации (что конкретно делается), а в рисунках и пиктограммах – сами действия, инструменты, рекомендации по безопасности.

6. Модели бизнес-процессов в различных нотациях могут служить «связующим звеном» между участниками процессов различного возраста и образования. При этом четко прослеживается тенденция к упрощению моделей при выборе вариантов их визуального ряда. Скорее всего, в ближайшем будущем сложные нотации постепенно будут вытеснены новым языком и соответствующим общим «визуальным кодом».

Очевидно, что дальнейшие исследования в данной области необходимы для создания нового языка-стандарта, построенного на принципах а) цели информации, б) уникальности либо универсальности ее использования в) контекста.

Литература

- Гиляревский 2003 – *Гиляревский Р.С.* Основы информатики: Курс лекций. М.: Экзамен, 2003.
- Каменнова, Крохин, Машков 2018 – *Каменнова М.С., Крохин В.В., Машков И.В.* Моделирование бизнес-процессов: В 2 ч. Ч. 1. М.: Юрайт, 2018.
- Лотман 2000 – *Лотман Ю.М.* Семиосфера. Культура и взрыв. Внутри мыслящих миров. СПб.: Искусство-СПБ, 2000.
- Таратухина, Цыганова 2019 – *Таратухина Ю.В., Цыганова Л.А.* Межкультурная коммуникация: семиотический подход. М.: Юрайт, 2019.
- Шеер 2000 – *Шеер А.В.* Моделирование бизнес-процессов. М.: Серебряные нити, 2000.
- Hall 1960 – *Hall E.T.* The silent language in overseas business // *Harvard Business Review*. 1960. May.
- Hofstede 1980 – *Hofstede. G.* Culture's consequences: intern differences in work-related values. London: Sage Publications, 1980.
- Nisbett 2003 – *Nisbett R.* The Geography of thought. New York: Free Press, 2003.
- Tversky, Kahneman 1981 – *Tversky A., Kahneman D.* The framing of decisions and the psychology of choice // *Science, New Series*. 1981. Vol. 211, no. 4481. P. 453–458.

References

- Gilyarevskii, R.S. (2003), *Osnovy informatiki: Kurs lektzii* [Computer Science Basics: Lecture Course], Examen, Moscow, Russia.
- Hall, E.T. (1960), "The silent Language in Overseas Business", *Harvard Business Review*, May.
- Hofstede, G. (1980), *Culture's Consequences: Intern Differences in Work-Related Values*, Sage Publications, London, UK.
- Kamennova, M.S., Krokhin, V.V. and Mashkov, I.V. (2018), *Modelirovanie biznes-protsessov* [Business Processes Modeling], in 2 vols, vol. 1, Yurait, Moscow, Russia.
- Lotman, Yu.M. (2000), *Semiosfera. Kul'tura i vzryv. Vnutri myslyashchikh mirov* [Semiosphere. Culture and explosion. Inside the thinking worlds], Iskusstvo-SPB, Saint-Petersburg, Russia.
- Nisbett, R. (2003), *The geography of thought*, Free Press, New York, USA.
- Sheer, A.V. (2000), *Modelirovanie biznes-protsessov* [Business Processes Modeling], Serebryanye niti, Moscow, Russia.
- Taratukhina, Yu.V. and Tsyganova, L.A. (2019), *Mezhkul'turnaya kommunikatsiya: semioticheskii podkhod* [Intercultural communication. A semiotic approach], Yurait, Moscow, Russia.
- Tversky, A. and Kahneman, D. (1981), "The framing of decisions and the psychology of choice", *Science, New Series*, vol. 211, no. 4481, pp. 453–458.

Информация об авторах

Ярослав В. Горчаков, кандидат сельскохозяйственных наук, доцент, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия; 101000, Россия, Москва, ул. Мясницкая, д. 20, ygorchakov@hse.ru

Юлия В. Таратухина, кандидат филологических наук, доцент, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия; 101000, Россия, Москва, ул. Мясницкая, д. 20, jtaratuhina@hse.ru

Information about the authors

Yaroslav V. Gorchakov, Cand. of Sci. (Agriculture), associate professor, National Research University “Higher School of Economics”, Moscow, Russia; bld. 20, Myasnitskaya Str., Moscow, Russia, 101000; ygorchakov@hse.ru

Yulia V. Taratuhina, Cand of Sci. (Philology), associate professor, National Research University “Higher School of Economics”, Moscow, Russia; bld. 20, Myasnitskaya Str., Moscow, Russia, 101000; jtaratuhina@hse.ru

Обзор алгоритмов обнаружения текстовых областей на кадрах видеопотока

Николай В. Силаков

*Московский государственный
технический университет имени Н.Э. Баумана,
Москва, Россия, silakov.nikolay@gmail.com*

Кирилл Л. Тассов

*Московский государственный
технический университет имени Н.Э. Баумана,
Москва, Россия, ktassov@policesoftware.ru*

Аннотация. Широкое развитие видеотехнологий совместно с социальными сетями, такими как YouTube и TikTok, привело к резкому увеличению объема информации. Обработка и анализ этих данных ложится на плечи человека. Особенно тяжело бывает выделить полезную текстовую информацию из всего видеопотока. Данная проблема особо остро стоит в таких областях, как государственная оборона и обеспечение правопорядка, где объем поступающей видеoinформации огромен. В видеопотоке может содержаться полезная метаинформация, с помощью которой появляются возможности для поиска, классификации и привязки этих данных к конкретному видеоконтенту. Уже существуют системы автоматического распознавания государственных регистрационных знаков, транспортных средств, номеров железнодорожных вагонов, названий улиц и распознавание титров видео. Но в кадрах видеопотока может находиться еще много метаинформации, такой как маркировка различных объектов и технических изделий, номера зданий, объявления, вывески, надписи, текст на документах и многое другое. Создание системы автоматического детектирования любого текста в видеоконтенте значительно улучшит процессы обработки и повысит эффективность работы информационно-поисковых систем. Эта статья посвящена обзору методов детектирования текстовых областей на кадрах видеопотока. Методы анализируются с точки зрения применимости и универсальности. Даны сравнительный анализ и оценка популярных методов обнаружения текстовых областей.

Ключевые слова: распознавание образов, детектирование текстовых областей, сверточные нейронные сети, детектор Канни, SWT, AdaBoost

Для цитирования: Силаков Н.В., Тассов К.Л. Обзор алгоритмов обнаружения текстовых областей на кадрах видеопотока // Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2020. № 2. С. 27–45. DOI: 10.28995/2686-679X-2020-2-27-45

Overview of the text area detection algorithms in video stream frames

Nikolai V. Silakov

*Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russia, silakov.nikolay@gmail.ru*

Kirill L. Tassov

*Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russia, ktassov@policesoft.ru*

Abstract. The widespread development of video technologies in cooperation with social networks such as YouTube and TicToc has led to a sharp increase in the volume of information. The processing and analysis of this data fall on the shoulders of a person. It happens as especially difficult to extract useful text information from the entire video stream. That issue is particularly acute in areas such as the state defense and law enforcement, where the volume of incoming video information is huge. A video stream can contain useful meta information helpful to search, classify, and link the data to specific video content. There are already systems for automatic recognition of the state registration plates, vehicles, railway car numbers, street names, and video titles. However, there may still be a lot of metainformation in the frames of the video stream, such as the marking of various objects and technical products, building numbers, ads, signs, inscriptions, text on documents, and much more. Creating a system for automatic detection of any text in video content will significantly improve the processing and increase the efficiency of information search engines. This article provides an overview of methods for detecting text regions in frames of the video stream. The methods are analyzed in terms of applicability and universality. A comparative analysis and evaluation of popular methods for detecting text areas are given.

Keywords: pattern recognition, text area detection, convolutional neural networks, Canny detector, SWT, AdaBoost

For citation: Silakov, N.V. and Tassov, K.L. (2020), “Overview of the text area detection algorithms in video stream frames”, *RSUH/RGGU Bulletin. “Information Science. Information Security. Mathematics” Series*, no. 2, pp. 27–45, DOI: 10.28995/2686-679X-2020-2-27-45

Введение

При первичном рассмотрении систем распознавания текстов можно выделить общий алгоритм их работы (рис. 1).



Рис. 1. Этапы выделения и распознавания текста на изображениях

Первым этапом является детектирование и локализация областей текста. В результате детектирования определяется присутствие на исходном изображении текстовых областей (ТО): если таковых нет, то процесс локализации и обработки изображения не происходит, в противном случае дальше ТО локализуются и обрабатываются.

Алгоритмы улучшения качества предполагают предварительное сглаживание изображения, определение типов присутствующих шумов и их устранение.

Сегментация заключается в разбиении текста на строки, слова и символы.

Для распознавания символов используются шаблонные, структурные и признаковые методы.

Данная статья посвящена детектированию ТО на кадрах видеопотока, которые представляют с собой разнородные, зашумленные изображения реальных сцен. Основные сложности, с которыми сталкиваются системы распознавания текста, – это:

- ТО могут располагаться в произвольном месте, иметь различную яркость и размер;
- ТО могут быть стилизованными и значительно отличаться от машинописных;

- как изображение, так и сама ТО могут иметь различные искажения (низкую контрастность, различные ракурсы, зашумления);
- наличие и количество ТО заранее не известны.

Задача локализации ТО состоит в определении наличия или отсутствия ТО на исходном изображении и, в случае наличия ТО, нахождении координат и размера каждой из них.

Выделяют два подхода к выделению ТО: первый реагирует на области, где возможен текст на изображении второй непосредственно на каждый символ. По порядку поиска ТО существующие методы обнаружения и локализации текста можно объединить в три группы [Shesagiri, Upadhayaya, VijayaKumari 2012] (рис. 2).

Среди выделенных групп методы машинного обучения для нисходящих методов локализации ТО имеют наибольший потенциал для обеспечения максимальной производительности, однако их недостаток в виде высокой стоимости вычислений является весьма ощутимым. Эвристические методы не применимы в задачах детектирования ТО на изображениях со сложным фоном, поскольку при определенно заданных параметрах они будут надежны лишь для некоторых классов изображений, т.е. такой подход не является универсальным.

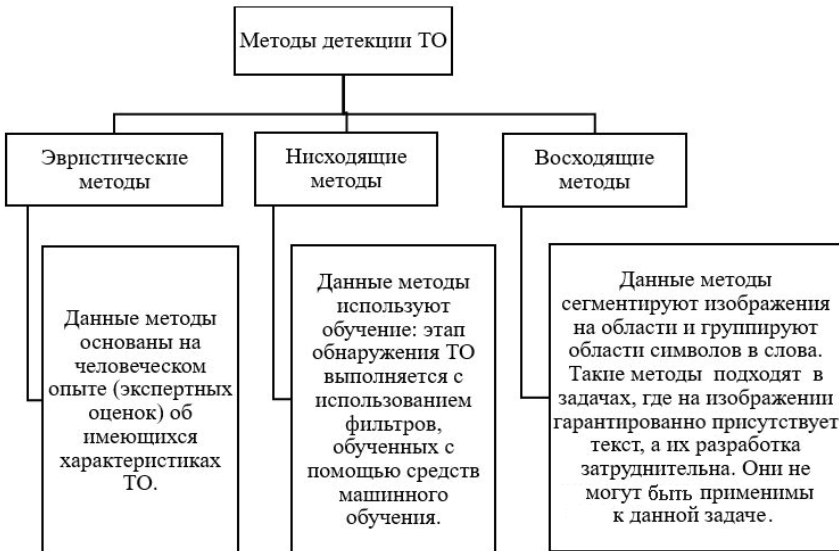


Рис. 2. Классификация методов поиска ТО [Jain, Zhong 1996]

Методы, реагирующие непосредственно на текстовые зоны/области

Дискретное косинусное преобразование (ДКП) является одним из ортогональных преобразований, реализующих разложение изображения по частотам с определенными коэффициентами, и применяется в алгоритмах сжатия с потерями при кодировании форматов MPEG и JPEG.

Двумерное дискретное косинусное преобразование матрицы A размера $M \times N$ осуществляется по следующей формуле:

$$B_{pq} = \alpha_p \beta_q \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{M-1} A_{mn} \times \cos\left(\frac{\pi(2m+1)p}{2M}\right) \cos\left(\frac{\pi(2n+1)q}{2N}\right), \quad (1)$$

где $0 \leq p \leq M-1$, $0 \leq q \leq N-1$ – найденные частоты вдоль горизонтального и вертикального направления соответственно, а

$$\alpha_p = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{M}}, & p = 0 \\ \sqrt{2/M}, & 1 \leq p \leq M-1 \end{cases}; \quad (2)$$

$$\beta_q = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}}, & q = 0 \\ \sqrt{2/N}, & 1 \leq q \leq N-1 \end{cases}. \quad (3)$$

Полученные частотные коэффициенты содержат информацию о направленности и периодичности локальных блоков изображения. Именно на этих факторах основывается возможность применения ДКП для детектирования текстовой информации, так как ТО обладают уникальными текстурными особенностями.

Методы, основанные на ДКП, имеют высокую сложность вычисления, так как они требуют прохождения по всему изображению в режиме скользящего окна и после их применения требуется использовать дополнительные методы классификации найденных областей. Их относят к группе эвристических подходов, следовательно, они не являются универсальными для решения задачи, вызывают сложности настройки порогов детектирования, не реагируют на текстовые символы, соразмерные с исходным изобра-

жением, накладывают высокие требования к производительности системы и требуют применения дополнительных методов классификации.

В последнее время участилось использование в системах для обнаружения ТО на изображениях алгоритма SWT (Stroke Width Transform – преобразование по толщине штриха) [Epshtein, Ofek, Wexler 2010]. В этом алгоритме используется толщина штриха текстового символа, которая не имеет свойства меняться в рамках области текста изображения, следовательно, она является оптимальной характеристикой для возможности обнаружить текст в изображениях. Перед использованием этого алгоритма в классических системах следует предварительно преобразовать изображение в градации серого. SWT-преобразование изображения реализуется по следующему алгоритму (рис. 3).

1. Выбирается пиксель контурного изображения. Его координаты сохраняются в памяти как P1. В зарезервированном изображении с размытым контуром находится пиксель с такими же координатами, и его окрестности проверяются на наибольшую (если текст светлее фона) либо наименьшую (в противном случае) интенсивность. Координаты этого пикселя также сохраняются в память как P2.
2. Проводится луч из пикселя с координатами P1 в направлении пикселя с координатами P2. Если построенный луч пересекает любой необработанный пиксель контура либо достигает границы изображения – он заполняется пикселями определенной интенсивности, рассчитываемой исходя из длины получившегося отрезка.
3. Повторяются шаги 1 – 2 до тех пор, пока каждый пиксель неразмытого контурного изображения не будет принадлежать какому-либо построенному лучу. В результате данного этапа обработки получаем так называемое SWT-изображение. При этом текстовые области явно отличаются от любых других областей, что можно увидеть на рис. 4.

В качестве особенности метода обнаружения ТО в процессе формирования SWT-изображения можно выделить учет зависимости соотношения фона (I_f) и средней интенсивности цвета шрифта (I_c). Применение двукратной SWT-обработки изображения различного соотношения I_c/I_f , а также последующая конкатенация полученных результатов дают возможность увеличить точность обнаружения текстовых областей на неоднородном фоне.

Для проверки принадлежности контура к символам рассчитывается среднее значение толщины штриха в этом контуре. Для каждого символа текста толщина штриха должна отличаться от среднего значения не более чем на 10 %.



Рис. 3. Схема алгоритма SWT-обработки изображения



Рис. 4. Построение SWT-изображения:

а – исходное изображение, б – контурное изображение,
в – SWT-изображение

Для выделенных символов проверяется соотношение пропорций по формуле

$$c = \frac{h}{w}, \quad (4)$$

где h – высота символа; w – его ширина. При значениях $c > 1,5$ символ исключается из дальнейшего процесса обработки.

Далее происходит конкатенация полученных после фильтрации компонент в строки, исходя из координат полученных ранее символов, что впоследствии дает возможность получить объединенные в компоненты символы, которые готовы к последующим шагам классификации или же к распознаванию.

Предложенный Y. Freund и R. Schapire в 1999 г. [Freund, Schapire 1997], [Freund, Schapire 1999] алгоритм AdaBoost (Adaptive boosting – адаптированное улучшение) относится к алгоритмам машинного обучения и успешно используется в процессе решения задач обнаружения объектов на изображениях и видеопоследовательностях.

Адаптивный принцип работы алгоритма AdaBoost заключается в каскадной структуре, состоящей из слабых классификаторов. Каждый слабый классификатор учится на ошибках предыдущего классификатора, который является ориентированным на определенный набор характерных признаков. Классификатор выдает два варианта ответа: «верно» или «ложь» [Chen, Odobez, Bourlard 2003; [Cui, Gu, Cai, Sun 2009]. Каждый каскад включает в себя вычисление суммы значений слабых классификаторов и последующее сравнение ее с установленным порогом. Далее каскадный классификатор исключает из возможных вариантов рассмотрения те области изображения, где нет признаков искомого объекта. В итоге получаем только те области, которые имеют большую вероятность того, что они содержат искомым объект.

Этот алгоритм показывает как достаточно высокую точность детектирования, так и высокую скорость работы. Сложность обучения с целью достигнуть наиболее высокой степени инвариантности к аффинным и проекционным искажениям объектов на изображениях и интенсивности освещения можно назвать основным недостатком данного алгоритма.

Методы, реагирующие непосредственно на каждый символ

На сегодняшний день одной из наиболее мощных и популярных технологий решения задач, заключающихся в распознавании образов разной степени сложности, является сверточная нейронная сеть. Она является особым видом нейросети прямого распространения, в которой под прямым распространением можно понимать разбиение нейронов на группы, называемые слоями. В процессе использования такого типа нейросетей по отношению к данным происходит последовательный подсчет значений переменных при активации слоев – от первого слоя к последующему. Выходами нейронной сети являются значения активации последнего слоя. Разработчик СНС Y. LeCun предложил следующую архитектуру СНС (рис. 5).

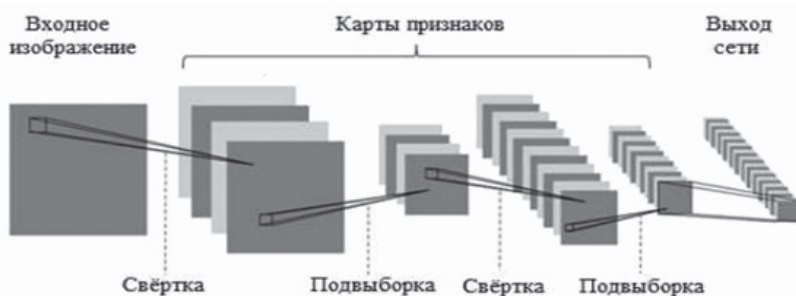


Рис. 5. Архитектура сверточной нейронной сети Y. LeCun

В основе построения СНС лежат три основные идеи:

- каждый нейрон получает входной сигнал от локального рецептивного поля предыдущего слоя, что обеспечивает двумерную локальную связность нейронов;
- каждый скрытый слой сети состоит из множества плоскостей (карт признаков), на которых все нейроны имеют общие веса, что позволяет обеспечить инвариантность к смещению, а также сокращение общего числа весовых коэффициентов сети; в процессе обучения карты признаков выделяются различные особые признаки объекта;

- вычислительный слой, который следует за каждым слоем свертки, помогает осуществить локальное усреднение и подвыборку, обеспечивающее уменьшение разрешения для карт признаков.

На вход подаются цветные изображения выбранного формата и размера. Входные данные каждого полученного пикселя должны быть нормализованы в диапазоне от 0 до 1. Для этого используется следующая формула:

$$f(p, min, max) = \frac{p - min}{max - min}, \quad (5)$$

где f – функция нормализации, p – значение конкретного цвета (величина от 0 до 255), min – минимальное значение цвета в конкретном пикселе, max – максимальное значение цвета в конкретном пикселе.

Слой свертки представляет собой набор карт (карт признаков), каждая такая карта имеет синаптическое ядро. Количество карт определяется соответствующими требованиями к задаче. Большое число улучшит точность, но это приведет к возрастанию требуемой вычислительной мощности [Shesagiri, Upadhayaya, VijayaKumari 2012].

Размер карт сверточного слоя вычисляется по формуле

$$(w, h) = (mW - kW + 1, mH - kH + 1), \quad (6)$$

где (w, h) – размер сверточной карты, mW – ширина предыдущей карты, mH – высота предыдущей карты, kW – ширина ядра, kH – высота ядра.

В сверточной нейронной сети ядро – система разделяемых весов или синапсов.

Слой подвыборки имеет карты, число которых совпадает с предыдущим слоем (рис. 6). Цель данного слоя – уменьшить размерность карт.

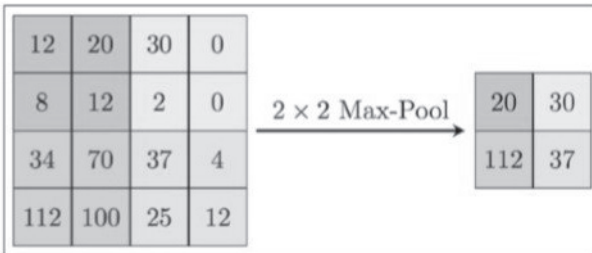


Рис. 6. Формирование новой карты подвыборочного слоя

Формула для формирования слоя:

$$x^l = f(a^l \times f_{\max}(x^{l-1}) + b^l), \quad (7)$$

где x^l – выход слоя l , $\varphi()$ – функция активации, a^l – коэффициент масштабируемости, b^l – коэффициенты сдвига слоя, $f_{\max}()$ – операция по выборке локальных максимальных значений.

Последним слоем является полносвязный слой, который представляет собой обычный слой многослойного перцептрона. Цель данного слоя – смоделировать сложную нелинейную функцию, при оптимизации которой улучшается качество распознавания [Simard, Steinkraus, Platt 2003].

Вычисление значений нейронов осуществляется по следующей формуле:

$$x_j^l = \varphi\left(\sum_i b_i^{l-1} \times w_{i,j}^{l-1} + b_j^{l-1}\right), \quad (8)$$

где x_j^l – карта признаков j (выход слоя l), $\varphi()$ – функция активации, b_i^{l-1} – коэффициенты сдвига l , $w_{i,j}^{l-1}$ – матрица весовых коэффициентов.

Выходной слой связан со всеми нейронами предыдущего слоя. Количество нейронов равно количеству распознаваемых классов.

В настоящий момент отсутствуют четкие рекомендации по выбору структуры сети, количества карт в слое, количества карт предыдущего слоя, участвующих в формировании карты текущего слоя, количества нейронов в полносвязном слое и т. д. [Delakis, Garcia 2008], [Simard, Steinkraus, Platt 2003].

Для обучения СНС часто используется стандартный алгоритм обратного распространения ошибки (back propagation), который был предложен в 1986 г. Румельхартом, Маклеланом и Вильямсом [Rumelhart, Hinton, Williams 1986], и специализированные базы изображений.

Одна из основных проблем, с которой сталкиваются при обучении СНС для обнаружения локализации ТО на изображениях со сложным фоном, является то, что качество детектирования области изображения (текстовая область, нетекстовая область) существенно зависит от обучающей выборки, а именно от ее объема, релевантности и репрезентативности.

Данный метод является наиболее подходящим для решения поставленной задачи. Он является оптимальным по ресурсным затратам и качеству выявления ТО (активации внутри одного слоя могут происходить параллельно и одновременно, т. к. они

взаимно независимы, это дает большое преимущество при вычислениях на современных процессорах, особенно на графических сопроцессорах).

Несмотря на то что алгоритм Канни [Canny 1983] был разработан на заре компьютерного зрения, он остается одним из лучших детекторов границ. Этот алгоритм [Фисенко 2008] базируется на четырех основных критериях.

Отзыв – обнаружение текста должно локализовать максимально возможное количество ТО;

- точность – обнаруженные результаты не должны содержать нетекстовых областей;
- компактность – обнаруженная область должна точно локализовать свой соответствующий символ без дополнительного поля;
- уникальность – один отклик на одну границу [Cho, Sung, Jun 2016].

Алгоритм является многоэтапным и состоит из следующих шагов.

1. Сглаживание. Для подавления шумов производится размытие изображения фильтром Гаусса. Уравнение для ядра фильтра Гаусса размером $(2k + 1) \times (2k + 1)$ определяется следующим образом:

$$H_{ij} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(i-(k+1))^2 + (j-(k+1))^2}{2\sigma^2}}, \quad 1 \leq i, j \leq (2k + 1). \quad (9)$$

В зависимости от условий, в которых применяется детектор, необходимо выбирать параметр σ , который обеспечивает наилучшее подавление шума.

2. Поиск градиентов (рис. 7). Контур отмечается там, где значение градиента изображения имеет наибольшее значение. На этом этапе используется оператор Собеля, который использует две маски размерности (3×3) .

$$G_x = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad G_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Величина градиента и его направление определяются соответственно по формулам

$$G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2} ; \quad (11)$$

$$\theta = \arctan \frac{G_y}{G_x} . \quad (12)$$

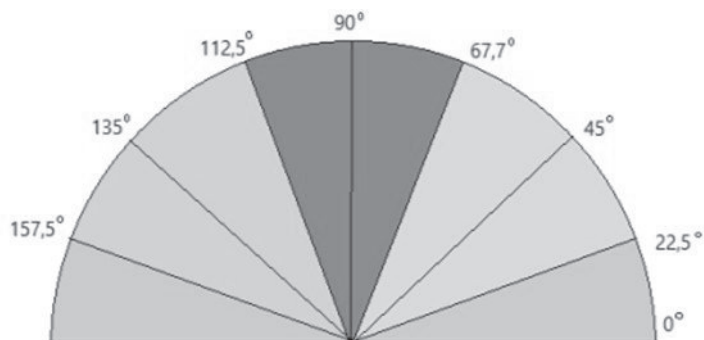


Рис. 7. Сектора округления значений направления градиента

3. Подавление немаксимумов. Пикселями границ объявляются пиксели, в которых достигается локальный максимум градиента в направлении вектора градиента. Этот шаг позволяет не разрывать саму границу.

4. Двойная пороговая фильтрация. Возможные границы определяются на основе нижнего и верхнего порогов. Если значение градиента в каком-то месте фрагмента превышает верхний порог, то этот элемент помечается как сильный текст, а если меньше верхнего и больше нижнего, то помечается как слабый текст.

Сильный текст включается в конечный результат, поскольку он классифицируется с высокой степенью надежности. Однако слабый текст может быть либо истинным текстом, либо нетекстом. Таким образом, он включается в конечный результат тогда и только тогда, когда имеет схожие свойства с сильными текстом.

Если на всем фрагменте нет ни одной точки со значением больше верхнего порога, то он удаляется. При таком подходе фрагмент границы обрабатывается как целое, что способствует удалению слабых границ. Для выделения границы с текстом чаще всего используют следующие свойства: пространственное расположение, размер (т. е. ширина и высота), цвет, соотношение между большой и малой шириной хода должны быть близкими, чтобы считаться частью одного и того же текста.

5. Трассировка области неоднозначности. Итоговые границы определяются путем подавления всех краев, не связанных с сильными границами. Таким образом, задача сводится к выделению групп пикселей, получивших на предыдущем шаге промежуточное значение, и отнесение их к границе (при условии, что они соединены с одной из установленных границ); в противном случае они подавляются. Добавление пикселя к группе происходит, если он соприкасается с ней по одному из восьми направлений.

На основе описанного в предыдущем пункте алгоритма построим блок-схему детектора Канни (рис. 8).



Рис. 8. Алгоритм выделения контуров Канни

На рис. 9 представлены результаты обработки исходного изображения методом Канни.

Основными недостатками этого подхода можно назвать высокую сложность реализации и довольно высокую ресурсоемкость; кроме того, метод несколько округляет углы объекта, что приводит к изменению параметров контура.

Достоинствами метода являются, в первую очередь, слабая чувствительность к шумам и ориентации границ областей, а во вторую – что алгоритм четко выделяет границы объектов. Также он исключает ошибочное обнаружение контура там, где объектов нет.



а) Исходное изображение

б) Экстремальные области после подавления немаксимумов



с) Классификация текста с высоким порогом

д) Классификация текста с низким порогом



е) Трассировка области

ф) Результат неоднозначности

Рис. 9. Результаты обработки изображения детектором Канни

Сравнительный анализ приведенных методов детектирования

Все описанные методы, за исключением ДКП, были реализованы на языке Python3. В качестве входных данных использована база данных ICDAR 2013 Robust Reading Competition, состоящая из 229 изображений реальных сцен для обучения и 233 для тестов.

В качестве характеристик сравнения методов детектирования ТО были взяты меры точности Precision и полноты Recall, а также F1 – мера, отражающая гармоническое среднее между ними.

Мера точности (Precision) и полноты (Recall) определяются:

$$Precision = \frac{TP}{TP + FP} ; \quad (13)$$

$$Recall = \frac{TP}{TP + FN} , \quad (14)$$

где TP – истинно-положительное решение, FP – ложно-положительное решение, FN – ложно-отрицательное решение.

Определение меры F1:

$$F1 = 2 \frac{Precision \times Recall}{Precision + Recall} . \quad (15)$$

Из результатов экспериментов, приведенных в таблице, следует, что для детектирования ТО на изображениях на сложном фоне лучше всего подходят СНС и Канни детектор, но они требуют повышенных вычислительных ресурсов. Также СНС необходима репрезентативная и релевантная обучающая выборка, а Канни детектору – настройка порогов. Эти методы справляются с разными типами шрифтов и языками, а также менее чувствительны к шумам и ориентации.

Таблица

Сравнение методов детектирования ТО
на данных ICDAR 2013 RRC

| | AdaBoost | SWT | СНС | Canny Detector |
|-----------|----------|------|------|----------------|
| Recall | 0,67 | 0,73 | 0,74 | 0,89 |
| Precision | 0,68 | 0,81 | 0,86 | 0,92 |
| F1 мера | 0,67 | 0,77 | 0,80 | 0,90 |

Заключение

Из приведенного обзора методов детектирования ТО на изображениях со сложным фоном следует, что ни один не дает достаточно достоверных результатов. Каждый из них имеет сильные и слабые стороны в определенных типах изображения, например, к аффинным и проекционным искажениям СНС и Canny Detector устойчивее остальных. Для систем обнаружения и выделения ТО, где

очень важно не пропустить кадр с текстом, т.е. не допустить ошибки второго рода, можно пренебречь количеством ошибок первого рода, когда система отреагировала на изображение, не содержащее ТО. Для таких систем лучше использовать каскадную обработку видеопотока, применяя параллельно сразу несколько методов. Это позволит уменьшить количество ошибок второго рода, но может привести к увеличению ошибок первого рода, хотя значительно улучшит качество детектирования ТО.

Литература

- Фисенко 2008 – *Фисенко В.Т.* Компьютерная обработка и распознавание изображений. СПб.: СПбГУ, ИТМО, 2008.
- Canny 1983 – *Canny J.F.* Finding edges and lines in images. Cambridge: MIT Press, 1983.
- Chen, Odobez, Bourlard 2004 – *Chen D., Odobez J.-M., Bourlard H.* Text detection and recognition in images and video frames // Pattern Recognition. 2004. Vol. 37, no. 3. P. 595–608.
- Cho, Sung, Jun 2016 – *Cho H., Sung M., Jun B.* Canny text detector: fast and robust scene text localization algorithm // IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Las Vegas, 2016. P. 3566–3573.
- Cui, Gu, Cai, Sun 2009 – *Cui D., Gu D., Cai H., Sun J.* License plate detection algorithm based on Gentle AdaBoost algorithm with a cascade structure // Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics. Guilin, 2009. P. 1962–1966.
- Delakis, Garcia 2008 – *Delakis M., Garcia C.* Text detection with convolutional neural networks // International Conference on Computer Vision Theory and Applications. Rennes, 2008. P. 290 – 294.
- Epshtein, Ofek, Wexler 2010 – *Epshtein B., Ofek E., Wexler Y.* Detecting text in natural scenes with stroke width transform // IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. San Francisco, 2010. P. 2963–2970.
- Freund, Schapire 1997 – *Freund Y., Schapire R.E.* A Decision-Theoretic Generalization of On-Line Learning and an Application to Boosting // Journal of computer and system sciences. 1997. Vol. 55. Issue 1. P. 119–139.
- Freund, Schapire 1999 – *Freund Y., Schapire R.E.* A Short Introduction to Boosting // Journal of Japanese Society for Artificial Intelligence. 1999. Vol. 14. P. 771–780.
- Jain, Zhong 1996 – *Jain A.K., Zhong Y.* Page segmentation using texture analysis // Pattern Recognition. 1996. Vol. 29. Issue 3. P. 595 – 608.
- Rumelhart, Hinton, Williams 1986 – *Rumelhart D.E., Hinton G.E., Williams J.* Learning Internal Representations by Error Propagation // Parallel Distributed Processing. 1986. Vol. 1. P. 318–362.
- Shesagiri, Upadhayaya, VijayaKumari 2012 – *Shesagiri T., Upadhayaya N., Vijaya Kumari G.* End-to-End Text Recognition with Convolutional

- Neural Networks // International Journal of Latest Research in Science and Technology. 2012. Vol. 1. Issue 2. P. 132 – 136.
- Simard, Steinkraus, Platt 2003 – *Simard P.Y., Steinkraus D., Platt, J.* Best Practices for Convolutional Neural Networks Applied to Visual Document Analysis // International Conference on Document Analysis and Recognition (ICDAR). Edinburgh, 2003. P. 958–962.

References

- Canny, J.F. (1983), *Finding edges and lines in images*, MIT Press, Cambridge, MA, USA.
- Chen, D., Odobez J.-M., and Bourlard H. (2004), “Text detection and recognition in images and video frames”, *Pattern Recognition*, vol. 37, no. 3, pp. 595–608.
- Cho, H., Sung, M. and Jun, B. (2016), “Canny Text Detector: Fast and Robust Scene Text Localization Algorithm”, *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Las Vegas, USA, pp. 3566–3573.
- Cui, D., Gu, D., Cai, H. and Sun, J. (2009), “License plate detection algorithm based on Gentle AdaBoost algorithm with a cascade structure”, *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics*, Guilin, China, pp. 1962–1966.
- Delakis, M. and Garcia, C. (2008), “Text detection with convolutional neural networks”, *International Conference on Computer Vision Theory and Applications*, Rennes, France, pp. 290–294.
- Epshtein, B., Ofek, E. and Wexler, Y. (2010), “Detecting Text in Natural Scenes with Stroke Width Transform”, *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, San Francisco, USA, pp. 2963–2970.
- Fisenko, V.T. (2008), *Computernaya obrabotka i raspoznavanie izobrazheniy* [Computer processing and image recognition], SPBGU, ITMO, Saint-Petersburg, Russia.
- Freund, Y. and Schapire, R.E. (1997) “A Decision-Theoretic Generalization of On-Line Learning and an Application to Boosting”, *Journal of computer and system sciences*, vol. 55, pp. 119–139.
- Freund, Y. and Schapire, R.E. (1999), “A Short Introduction to Boosting”, *Journal of Japanese Society for Artificial Intelligence*, vol. 14, pp. 771–780.
- Jain, A.K. and Zhong, Y. (1996), “Page segmentation using texture analysis”, *Pattern Recognition*, vol. 29, issue 5, pp. 743–770.
- Rumelhart, D.E., Hinton, G.E. and Williams, J. (1986), “Learning Internal Representations by Error Propagation”, *Parallel Distributed Processing*, vol. 1, pp. 318–362.
- Shesagiri, T., Upadhayaya, N. and VijayaKumari, G. (2012), “End-to-End Text Recognition with Convolutional Neural Networks”, *International Journal of Latest Research in Science and Technology*, vol. 1, issue 2, pp. 132–136
- Simard, P.Y., Steinkraus, D. and Platt, J. (2003), “Best Practices for Convolutional Neural Networks Applied to Visual Document Analysis”, *International Conference on Document Analysis and Recognition (ICDAR)*, Edinburgh, pp. 958–962.

Информация об авторах

Николай В. Силаков, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия; 105005, Россия, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5; silakov.nikolay@gmail.com

Кирилл Л. Тассов, Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия; 105005, Россия, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5; ktassov@policesoft.ru

Information about the authors

Nikolai V. Silakov, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia; bld. 5, 2nd Baumanskaya Str., Moscow, Russia, 105005; silakov.nikolay@gmail.com

Kirill L. Tassov, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia; bld. 5, 2nd Baumanskaya Str., Moscow, Russia, 105005; ktassov@policesoft.ru

УДК 004.056

DOI: 10.28995/2686-679X-2020-2-46-56

Наукометрические показатели исследователей-лидеров научной деятельности в области информационной безопасности

Валерий В. Арутюнов

*Российский государственный гуманитарный университет,
Москва, Россия, warut698@yandex.ru*

Аннотация. На основе наукометрических показателей научной деятельности (публикационной активности, цитируемости и индекса Хирша) в текущем десятилетии выявлены в области информационной безопасности направления исследований и российские ученые-лидеры, итоги научной деятельности которых отличаются повышенной востребованностью. В числе этих направлений: применение методологического анализа в исследовании безопасности, методы оценки несоответствия средств защиты информации, способы повышения устойчивости LTE-сети в условиях деструктивных кибератак, системы раннего предупреждения о компьютерном нападении, использование технологий больших данных (Big Data) в области информационной безопасности и др. Отмечаются особенности динамики в 2012–2019 гг. публикационной активности российских ученых, цитируемости и востребованности итогов их научной деятельности. Анализ осуществлялся с использованием базы РИНЦ (Российского индекса научного цитирования). Дальнейшее развитие анализа исследований информационных потоков в области информационной безопасности с использованием базы РИНЦ позволит выявить российские организации и ученых-лидеров по основным современным направлениям обеспечения защиты информации: системам обнаружения вторжений (IDS-системам); идентификации и аутентификации субъектов доступа, в том числе с использованием современных биометрических методов и средств защиты; системам предотвращения утечки конфиденциальной информации (DLP-системам); криптографической защите информации (в том числе в области квантовой криптографии); системам управления информационной безопасностью.

© Арутюнов В.В., 2020

Ключевые слова: информационная безопасность, наукометрические показатели, публикационная активность, индекс Хирша, цитируемость, результативность научной деятельности

Для цитирования: Арутюнов В.В. Наукометрические показатели исследователей-лидеров научной деятельности в области информационной безопасности // Вестник РГГУ, Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2020. № 2. С. 46–56. DOI: 10.28995/2686-679X-2020-2-46-56

Scientometric indicators for leaders in the scientific research of the information security

Valery V. Arutyunov

*Russian State University for the Humanities,
Moscow, Russia, warut698@yandex.ru*

Abstract. Following the scientometric indicators of scientific activity (publication activity, citation index and Hirsch index) in the information security in the current decade the areas of research and also Russian scientists-leaders, whose results of scientific activities are in high demand have been identified. Those areas include the application of methodological analysis in security research, methods for assessing inconsistencies in the data protection tools, the ways to improve the LTE network stability against destructive cyber-attacks, early warning systems for computer attacks, the use of big data technologies in the information security field etc. The author notes some specifics in the dynamics of the Russian scientists' publication activity in 2012 – 2019 as well as citation and relevance of their scientific activities results. The analysis was carried out using the RSCI database (Russian science citation index).

Further development of the information flow research analysis in the field of information security using the RSCI database will allow identifying Russian organizations and leading scientists in the main modern information protection areas: Intrusion Detection Systems (IDS systems); identification and authentication of access subjects, including using modern biometric methods and security tools; confidential Data Leakage Prevention systems (DLP systems; cryptographic information protection (including in the field of quantum cryptography); information security management systems.

Keywords: information security, scientometric indicators, publication activity, h-index, citation, efficiency of research activity

For citation: Arutyunov, V.V. (2020) “Scientometric indicators for leaders in the scientific research of the information security”, *RSUH/RGGU Bulletin. “Information Science. Information Security. Mathematics” Series*, no. 2, pp. 46–56, DOI: 10.28995/2686-679X-2020-2-46-56

Введение

Стремительное развитие современных информационных и инновационных технологий и сети Интернет привело к формированию специализированной информационной среды, оказывающей существенное влияние на различные сферы человеческой деятельности. Функционирующие во многих сферах экономики и науки информационные системы и информационно-телекоммуникационные сети в наши дни позволяют преобразовывать традиционные формы бизнеса в электронный бизнес; они стали современным средством производства современной компании. В свою очередь, электронный бизнес использует современные информационные технологии и сеть Интернет для повышения эффективности всех направлений деятельности компаний, от поиска сотрудников, финансового анализа, маркетинга, производства до поддержки клиентов, партнерских отношений и платежей.

В XXI в. развитие мировой экономики характеризуется значительной зависимостью рынка от постоянно возрастающего объема информационных потоков. Несмотря на значительные усилия многих компаний по созданию современных технологий и средств защиты данных, их уязвимость не только не уменьшается, но и постоянно возрастает [Арутюнов 2016]. С каждым днем возрастает и актуальность проблем, связанных с обеспечением информационной безопасности организации, защитой формируемых данных, их обработки и передачи.

Хотя создание системы защиты информации не является главной задачей предприятия, как, например, производство продукции и достижение максимальной прибыли, эта функционирующая в организации система не должна приводить к серьезным трудностям в работе предприятия, и, в первую очередь, проектирование и внедрение такой системы должны быть экономически эффективными. В то же время система должна обеспечивать защиту критических ресурсов предприятия от всех реальных угроз.

Таким образом, необходимо отметить, что развитие сети Интернет привело в наше время к резкому повышению уязвимости информации.

В число основных факторов, которые способствуют в настоящее время повышению уровня уязвимости информации, входят следующие:

- значительный рост объемов информации, которая обрабатывается, накапливается и передается в различных системах и информационно-телекоммуникационных сетях;
- возрастание числа фирм, обладающих информацией, содержащей коммерческую или иную тайну (в России уже в конце

XX – начале XXI в. число коммерческих фирм значительно превысило количество государственных организаций);

- централизация многоаспектной информации в интегрированных базах данных, которая представляет интерес для значительного числа пользователей (в том числе и для нелегитимных пользователей);
- развитие телекоммуникационных режимов обработки информации и автоматизация межмашинного обмена данными (так, например, количество сайтов в сети Интернет в 2015 г. превысило 1 млрд, а «цифровая крепость» Пентагона еще в 2011 г. насчитывала более 7 млн компьютеров и около 15 тыс. компьютерных сетей);
- резкий рост количества пользователей, имеющих доступ к различным многофункциональным информационным системам и информационно-телекоммуникационным сетям, в том числе глобальным. Так, в России к 2020 г. число абонентов сотовой связи превысило 250 млн; резко увеличилось число пользователей глобальной сети – их количество в мире в настоящее время уже превышает 4 млрд, из них более 450 млн в Китае, более 90 млн в России. При этом эксперты отмечают, что в России еще в 2005 г. наступила эпоха так называемого Интернета-2, когда многие пользователи сети, а также организации уже не представляли своей ежедневной жизнедеятельности без сети Интернет).

Наличие таких уязвимостей в организационном и программно-техническом обеспечении систем и сетей привело в XXI в. к увеличению числа компьютерных преступлений в мире и в России и росту экономических потерь от них в развитых странах. Так, если в конце 90-х годов прошлого века ежегодный ущерб экономике США от реализации компьютерных преступлений составлял около 120 млн долл., в 2004 г. – более 400 млрд долл, то в начале текущего десятилетия ущерб, нанесенный только «цифровой крепости» Пентагона, оценивался уже в триллион долларов. И это несмотря на то, что в США функционируют 17 спецслужб (больше, чем в любой другой стране мира), в обязанности многих из которых входит защита активов организаций страны от злоумышленников.

В России в 2003 г. органами МВД России было зафиксировано около 7 тыс. компьютерных преступлений, в 2009 г. – более 17 тыс., в 2018 г. – более 110 тыс.; в последнем случае ущерб экономике России превысил 400 млрд руб.

О значимости в наши дни информационной безопасности свидетельствует уже тот факт, что в конце первого десятилетия XXI в. в Государственный рубрикатор научно-технической информации России был введен новый раздел 81.93.29 – «Информационная

безопасность. Защита информации». Другим фактом, подтверждающим пристальное внимание коммерческих и государственных организаций к вопросам защиты информации, циркулирующей в сети Интернет, является превышение в 2017 г. объема зашифрованного трафика в Интернете по сравнению с общедоступным.

При создании системы защиты информации необходимо учитывать современные достижения в различных направлениях обеспечения информационной безопасности; несомненный интерес представляют и сведения об исследователях, итоги исследований которых в данной области знаний отличаются высокой востребованностью.

Наукометрические показатели научной деятельности российских ученых в области информационной безопасности

Необходимо отметить, что в XXI в. в мире и в России все в большем числе случаев оценивают результаты работы ученых и специалистов в различных сферах науки и техники по конкретным количественным результатам, базирующимся на наукометрических показателях их научной деятельности (публикационной активности P , цитируемости C и индексе Хирша H).

При этом в наши дни значительный интерес представляют уже не только опубликованные итоги исследований и их цитируемость, но и востребованность V научным сообществом и специалистами различного профиля результатов научной деятельности ученых по различным направлениям наук, определяемая соотношением C/P .

Некоторые итоги анализа результатов приоритетных исследований в области образования, особенности цитируемости российских ученых в ряде отраслей наук, по версии РИНЦ (Российский индекс научного цитирования) [РИНЦ 2020] Научной электронной библиотеки Российской Федерации, приводятся в работах [Арутюнов 2015; Арутюнов 2018; Арутюнов, Цветкова 2018].

В наши дни в специализированную международную систему учета публикаций и цитирования WoS (Web of Science) [WoS CC 2020] вводятся данные из более 19 тыс. наиболее авторитетных научных журналов мира, а в систему Scopus [Scopus 2020] – сведения о публикационной активности и цитировании ученых из 23 тыс. журналов. Необходимо отметить, что большинство журналов, представленных в WoS, приходится на Великобританию, Нидерланды и США. При этом научная периодика других стран по целому ряду причин с трудом может попасть в этот узкий круг изданий, индексируемых в WoS.

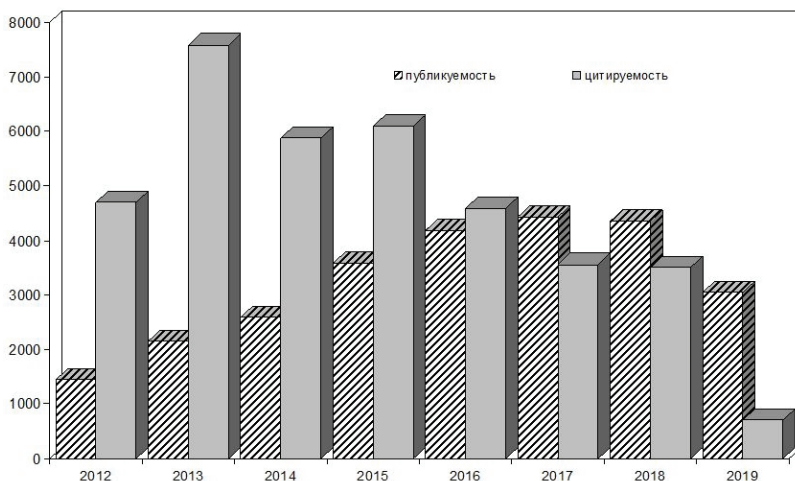


Рис. 1. Динамика показателей публикационной активности и цитируемости российских ученых в области информационной безопасности

В системах WoS и Scopus лишь фрагментарно учитываются результаты исследований российских ученых, поэтому в России с 2006 г. в Научной электронной библиотеке было начато формирование национальной базы РИНЦ, в которую, в отличие от многих других российских баз данных, вводятся сведения о наукометрических показателях организаций России и их сотрудников по всем направлениям научных исследований в соответствии с действующим российским Государственным рубрикаторм научно-технической информации.

В наши дни РИНЦ выполняет не только функции оперативного обеспечения научных исследований актуальной справочной информацией практически во всех отраслях знаний, но является также достаточно мощным инструментарием, который позволяет оценивать эффективность результатов научной деятельности ученых, организаций, журналов.

В настоящее время более 50% пользователей базы данных РИНЦ составляют зарубежные специалисты, и лидер среди них – Китайская академия наук, сотрудники которой ежедневно работают с РИНЦ, анализируя наукометрические показатели организаций, научных отраслей и персон в России, в том числе и в области информационной безопасности.

Показатели публикационной активности и цитируемости работ российских исследователей в области информационной безопасности представлены на рис. 1. Как следует из рис. 1, если публи-

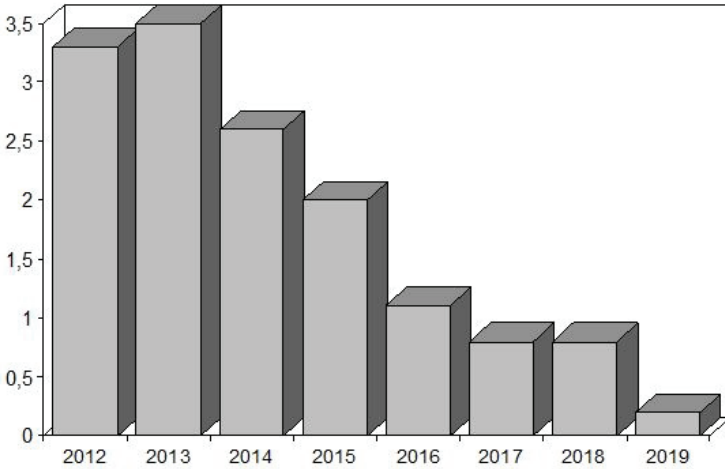


Рис. 2. Динамика показателей востребованности результатов исследований в области информационной безопасности

кационная активность ученых в этой области знаний возрастала с 2012 по 2017 г., то цитируемость результатов их работ, отраженных в публикациях, достигнув максимума в 2013 г., с 2014 г. начала уменьшаться (одна из причин этого спада, возможно, начало экономического кризиса в России, повлиявшего в последующие годы в том числе и на исследования в этой отрасли наук); при этом в 2016 – 2018 гг. публикационная активность российских ученых стабилизировалась на уровне ~ 4300 публикаций в год.

Малые значения показателей цитирования в 2019 г. в области информационной безопасности объясняются, как и для других естественно-научных отраслей, известной закономерностью: замедленной реакцией («откликом») научного сообщества на публикации текущего года.

На рис. 2 представлена динамика востребованности V итогов работ в 2012 – 2019 гг. российских ученых, работающих в области информационной безопасности.

Как следует из рис. 2, востребованность итогов исследований в этой сфере знаний была максимальной для 2013 г., затем она начала уменьшаться и для 2018 г. составила лишь около 20 % от максимума 2013 г.

Небольшие значения показатели востребованности в 2019 г. объясняются, очевидно, той же причиной, что и для показателей цитирования в этом году, – недостаточно активной реакцией научного сообщества на публикации текущего года.

В табл. приводятся данные, полученные о пяти российских ученых–лидерах в области информационной безопасности, результаты исследований которых, отраженные в публикациях, отличаются повышенной востребованностью. Сведения получены на начало 2020 г. также на основе базы данных РИНЦ о публикационной активности российских ученых в области информационной безопасности, цитируемости итогов работ и их востребованности.

Таблица

Наукометрические показатели
научной деятельности российских ученых–лидеров
в области информационной безопасности

| Фамилия, имя, отчество | Место работы | Востребованность результатов исследований | Количество публикаций | Индекс цитируемости | Индекс Хирша |
|----------------------------------|--|---|-----------------------|---------------------|--------------|
| Остапенко Григорий Александрович | Воронежский государственный технический университет | 14 | 143 | 1989 | 27 |
| Петренко Сергей Анатольевич | Университет Иннополис (Казань) | 12 | 315 | 3882 | 30 |
| Марков Алексей Сергеевич | МГТУ им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет) | 11 | 154 | 1664 | 22 |
| Жидко Елена Александровна | Воронежский государственный технический университет | 8 | 255 | 1956 | 37 |
| Минаев Владимир Александрович | МГТУ им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет) | 6 | 396 | 2229 | 23 |

Как следует из табл., в число этих пяти ученых входят по два представителя Воронежского государственного технического университета и Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана.

При этом для всех пяти ученых характерны высокий индекс цитируемости (он изменялся в пределах от более 1600 до почти 4000) и индекс Хирша (изменявшийся в диапазоне от более 20 до 37); для трех из пяти ученых показатель востребованности итогов их работ превышал 10.

Результаты проведенного исследования позволили также выявить, что высокой востребованностью отличались итоги исследовательской деятельности российских ученых по применению методологического анализа в исследовании безопасности, методам оценки несоответствия средств защиты информации, способам повышения устойчивости LTE-сети в условиях деструктивных кибератак, системам раннего предупреждения о компьютерном нападении, использованию технологий больших данных (Big Data) в области информационной безопасности.

Заключение

В результате выполненного исследования получены следующие основные результаты.

Выявлена динамика изменения в области информационной безопасности публикационной активности российских ученых, цитируемости и востребованности итогов их работ в 2012 – 2019 гг.

На основе наукометрических показателей научной деятельности (публикационной активности, цитируемости и индекса Хирша), имеющихся в базе РИНЦ, определены в текущем десятилетии в области информационной безопасности направления исследований и российские ученые-лидеры, итоги научной деятельности которых отличались повышенной востребованностью. В числе этих направлений: применение методологического анализа в исследовании безопасности, методы оценки несоответствия средств защиты информации, способы повышения устойчивости LTE-сети в условиях деструктивных кибератак, системы раннего предупреждения о компьютерном нападении, использование технологий больших данных (Big Data) в области информационной безопасности и др.

В пятерку ученых-лидеров в сфере информационной безопасности вошли по два ученых из Воронежского государственного технического университета и Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, а также один – из Университета Иннополис (Казань).

Выявлен ряд особенностей динамики наукометрических показателей в 2012 – 2019 гг., характерных для публикационной активности российских ученых, цитируемости и востребованности итогов их научной деятельности в области информационной безопасности.

В заключение необходимо отметить, что индекс Хирша в области информационной безопасности, определенный для множества публикаций российских ученых за период 2012 – 2019 гг., в несколько раз превышает минимальный порог мирового уровня научной активности исследователей, равный 16 в соответствии с рекомендациями РИНЦ [Ершова 2020]. Этот факт, свидетельствующий о высоком уровне научной активности российских исследователей, подтверждает также, что и в дальнейшем в области информационной безопасности следует ожидать стабильную публикационную активность российских ученых по результатам их исследований.

Следует также отметить, что дальнейшее исследование информационных потоков в области информационной безопасности с использованием базы РИНЦ позволит выявить российские организации и ученых-лидеров, работающих по основным современным направлениям обеспечения защиты информационных потоков: системам обнаружения вторжений (IDS-системам); идентификации и аутентификации субъектов доступа, в том числе с использованием современных биометрических методов и средств защиты; системам предотвращения утечки конфиденциальной информации (DLP-системам); криптографической защите информации (в том числе в области квантовой криптографии); системам управления информационной безопасностью.

Литература

- Арутюнов 2015 – *Арутюнов В.В.* Особенности рейтинга цитируемости российских ученых по версии РИНЦ // Научные и технические библиотеки. 2015. № 5. С. 28 – 43.
- Арутюнов 2016 – *Арутюнов В.В.* Современные проблемы и задачи обеспечения информационной безопасности // Вестник МФЮА. 2016. № 2. С. 213–222.
- Арутюнов 2018 – *Арутюнов В.В.* Результативность научной деятельности опорных вузов России // Научные и технические библиотеки. 2018. № 3. С. 33 – 43.
- Арутюнов, Цветкова 2018 – *Арутюнов В.В., Цветкова В.А.* Сравнительный анализ показателей публикационной активности и цитируемости российских ученых в отдельных естественно-научных областях знаний по данным РИНЦ и WOS CC // Информация и инновации. 2018. Т. 13. № 1. С. 22–27.

- Ершова 2020 – Ершова С.К. Инструкция по использованию РИНЦ [Электронный ресурс] // Восточно-Европейский Институт психоанализа. URL: <https://eeip.ru/about-organization/rints.html> (дата обращения 20 марта 2020).
- РИНЦ 2020 – РИНЦ: Российский индекс научного цитирования [Электронный ресурс]. URL: <https://elibrary.ru/querybox.asp?scope=newquery> (дата обращения 20 марта 2020).
- Scopus 2020 – Scopus: индексируемые журналы [Электронный ресурс] // Elsevier. URL: <https://www.elsevier.com/products/scopus> (дата обращения 20 января 2020).
- WoS CC 2020 – Web of Science Core Collection: статистические данные об индексируемых изданиях [Электронный ресурс]. URL: <https://clarivate.com/products/web-of-science/databases> (дата обращения 20 марта 2020).

References

- Arutyunov, V.V. (2015), “Features of the citation rating of Russian scientists according to the RSCI”, *Scientific and technical libraries*, vol. 5, pp. 28–43.
- Arutyunov, V.V. (2016), “Modern issues and tasks of information security”, *Vestnik MFUA*, vol. 2, pp. 213–222.
- Arutyunov, V.V. (2018), “Research performance of the Russian reference universities”, *Scientific and technical libraries*, vol. 3, pp. 33–43.
- Arutyunov, V.V. and Tsvetkova, V.A. (2018), “Comparative analysis of indicators in publication activity and citation of Russian scientists for certain natural science fields of knowledge according to the RSCI and WOS CC”, *Information and innovations*, vol. 13, no. 1, pp. 22–27.
- Ershova, S.K. (2020), “Instructions for using the RSCI”, *East European Institute of Psychoanalysis* [Online], available at: URL: <https://eeip.ru/about-organization/rints.html> (Accessed 20 March 2020).
- RSCI (2020), *Russian Science Citation Index*, [Online], available at: URL: <https://elibrary.ru/querybox.asp?scope=newquery> (Accessed 20 Jan 2020).
- Scopus (2020), “Scopus: indexed journals”, *Elsevier* [Online], available at: URL: <https://www.elsevier.com/products/scopus> (Accessed 20 January 2020).
- WoS CC (2020), *Web of Science Core Collection: statistics about indexed publications*, [Online], available at: URL: <https://clarivate.com/products/web-of-science/databases> (Accessed 20 March 2020).

Информация об авторе

Валерий В. Арутюнов, доктор технических наук, профессор, Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия; 125993, Россия, Москва, Миусская пл., 6; warut698@yandex.ru

Information about the author

Valery V. Arutyunov, Dr. of Sci. (Computer Science), professor, Russian State University for the Humanities, Moscow, Russia; bld. 6, Miusskaya Sq., Moscow, Russia 125993; warut698@yandex.ru

Премия Абеля как флагман мировых достижений в области математики

Наталья В. Гришина

*Российский государственный гуманитарный университет,
Москва, Россия, gmat@rambler.ru*

Аннотация. Присуждаемая Норвежской Академией наук ежегодная награда носит имя знаменитого ученого Нильса Хенрика Абеля и имеет репутацию Нобелевской премии для математиков, при этом размер ее в денежном исчислении составляет около \$1 млн.

Поскольку Альфред Нобель в своем завещании определил круг научных направлений для выплаты премий, в который не вошла математика, норвежский математик Софус Ли в конце своей жизни направлял все свои усилия и международный авторитет для создания фонда по присуждению премий математикам. Он хотел дать этой премии имя Нильса Хенрика Абеля, также норвежского математика.

В статье представлены историческая справка процесса становления Премии Абеля, а также лауреаты главной математической премии за все годы ее существования и их главные достижения.

Среди лауреатов Премии Абеля – выдающиеся ученые 11 стран мира: Франции, Великобритании, Ливана, США, Венгрии, Швеции, Индии, Бельгии, России, Канады и Израиля. Трижды премия была присуждена сразу двум ученым. А в 2019 г. лауреатом престижной премии в области математики впервые стала женщина – Карен Кескалла Уленбек – профессор, американский математик.

Ключевые слова: Премия Абеля, научные достижения, математика, лауреат Премии Абеля, выдающиеся ученые

Для цитирования: Гришина Н.В. Премия Абеля как флагман мировых достижений в области математики // Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2020. № 2. С. 57–71. DOI: 10.28995/2686-679X-2020-2-57-71

Abel Prize as the flagship of world math advances

Nataliya V. Grishina

*Russian State University for the Humanities,
Moscow, Russia, gmat@rambler.ru*

Abstract. The annual prize, awarded by the Norwegian Academy of Sciences, bears the name of the famous scientist Niels-Henrik Abel and has a reputation as a Nobel Prize for mathematicians, with its size in terms of money of about \$1 million.

Since Alfred Nobel, in his will, determined the range of scientific areas for the payment of bonuses that did not include mathematics, the Norwegian mathematician Sofus Lee at the end of his life devoted all his efforts and his international authority to create a foundation for awarding prizes to mathematicians. He wanted to give the award the name of Niels Henrik Abel, also a Norwegian mathematician.

The article presents a historical background for the formation of the Abel Prize. The winners of the main mathematical prize for all the years of its existence and their major achievements are shown.

Among laureates of the Abel Prize there are outstanding scientists from 11 countries: France, Great Britain, Lebanon, USA, Hungary, Sweden, India, Belgium, Russia, Canada and Israel. Three times the prize was at once awarded to two scientists. And in 2019, for the first time ever the woman – Karen Keskalla Uhlenbeck – professor, American mathematician, became the winner of the prestigious mathematics award.

Keywords: Abel Prize, scientific achievement, mathematics, laureate of the Abel Prize, outstanding scientists

For citation: Grishina, N.V. (2020), “Abel Prize as the flagship of world math advances”, *RSUH/RGGU Bulletin. “Information Science. Information Security. Mathematics” Series*, no. 2, pp. 57–71, DOI: 10.28995/2686-679X-2020-2-57-71

Введение

В XX–XXI вв. химия, физика, математика, автоматика и вычислительная техника, информатика заслуженно входят в число отраслей наук, определяющих развитие научно-технического прогресса. В этой пятерке особая роль принадлежит математике, выступающей в качестве связующего звена для всех указанных отраслей. Это отметил еще Г. Галилей, заметив, что природа формулирует свои законы языком математики, а М.В. Ломоносов подтвердил: «Все, что без этого было темно, сомнительно и неверно, математика

сделала ясным, верным и очевидным» [Ломоносов 1950]. Свое отношение к математике выразил и относительно далекий от нее, но известный всему миру И. Кант, отметив, что «Математика – наука, брошенная человеком на исследование мира в его возможных вариантах» [Кант 1966].

Поэтому вполне заслуженно присуждаемая Норвежской академией наук ежегодная награда, носящая имя знаменитого ученого Нильса Хенрика Абеля, имеет репутацию Нобелевской премии для математиков, а размер ее в денежном исчислении составляет около \$ 1 млн.

Альфред Нобель, будучи в первую очередь химиком, стал известен как изобретатель динамита. Ученый, глубокий пацифист, он был потрясен, когда в прессе относительно себя прочитал «торговец смертью». Не желая оставаться в памяти людей как изобретатель смертоносного взрывчатого вещества, он завещал создать фонд из своего состояния, ежегодные проценты от которого будут выдаваться в качестве премии тем, чьи научные открытия принесли максимальную пользу людям всего мира.

Нобель в своем завещании определил круг научных направлений для выплаты премий. Он выделил всего пять: физика, химия, физиология и медицина и литература.

На первый взгляд кажется странным, что среди «главных» научных направлений отсутствует математика. Даже есть версия, в соответствии с которой так случилось из-за мести любовнику своей жены – математику. Однако эта версия не выдерживает никакой критики – Альфред Нобель не был женат! Более логичной представляется другая версия: цель Нобеля была в поощрении открытий, приносящих максимальную пользу человечеству. А математика – это, скорее, как думают многие, зачастую от нее далекие, «зарядка для ума». И простым людям совершенно безразлично, как обстоят дела с теоремой Ферма.

Справедливости ради стоит отметить, что кроме математики в список Нобеля не вошли такие важные научные направления, как биология, география, и ряд других.

В настоящее время эта «несправедливость» в известной мере компенсирована, хотя путь для реализации самой идеи был непростой.

Всемирно известный норвежский математик Софус Ли в конце своей жизни направил все усилия и свой международный авторитет для создания фонда на присуждение премий математикам. Он хотел дать этой премии имя Нильса Хенрика Абеля (Abel, Niels Henrik), также норвежского математика.

Планировалось, что к столетию Абеля (1902 г.) указанная премия будет учреждена. К сожалению, усилия Софуса Ли не увенчались успехом и после его смерти (1899 г.) канули в Лету.

Однако в год празднования столетия Абеля король Норвегии Оскар II заинтересовался вопросом присуждения премии Абеля и был инициатором разработки устава и правил этой премии. К сожалению, по ряду причин и эта инициатива не увенчалась успехом. Однако спустя 100 (!) лет фонд Абеля все-таки был создан [Премия 2020].

В августе 2000 г. биограф Абеля Арильд Штубхауг и генеральный директор Telenor Тормод Хермансен обсудили события, произошедшие столетием ранее. Хермансен проинформировал министерство образования, а Штубхауг представил этот вопрос на кафедре математики в Университете Осло. В марте 2001 г. была создана рабочая группа по вопросу учреждения Премии Абеля, в которую вошли профессора Йенс Эрик Фенстад, Арнфинн Лаудаль и Рагни Пъене, административный руководитель департамента Ингвар Рейхельт, Нильс Вое Йохансен и Арильд Штубхауг. С того момента все вовлеченные стороны интенсивно работали над этим вопросом. 23 мая 2001 г. рабочая группа по Премии Абеля направила премьер-министру свое предложение об учреждении Премии Абеля.

На этот раз все старания увенчались успехом, и 23 августа 2001 г. премьер-министр Йенс Столтенберг объявил, что правительство создаст фонд Абеля на сумму 200 миллионов норвежских крон для ежегодного премирования выдающихся математиков мира.

Лауреаты Премии Абеля

Первым лауреатом Премии Абеля стал французский математик Жан-Пьер Серр «за ключевую роль в придании современной формы многим отраслям математики, включая топологию, алгебраическую геометрию и теорию чисел» [Holden, Piene 2009] – выдающийся ученый современности, который родился 15 сентября 1926 г. на юге Франции. Любопытен факт, что еще в 1954 г. Серр, получив премию Филдса в области математики, стал самым молодым лауреатом за всю историю этой премии.

В 2004 г. вторая Премия Абеля была присуждена сразу двум математикам: сэру Майклу Френсис Атья, профессору



Жан-Пьер Серр



Сэр Майкл Френсис Атья и Изадор М. Зингер

из Эдинбургского университета (Шотландия, Великобритания, Ливан), и Изадору М. Зингеру из Массачусетского технологического института (США) за формулировку и доказательство теоремы об индексе (теорема Атья–Зингера). Это открытие является одной из величайших вех математики XX в. Интересно, что с течением времени эта теорема находит все большее число применений. Изначально это касалось только математики, а потом и теоретической физики. Этот факт стал большой неожиданностью как для математиков, так и для физиков. Более того, теорема дала возможность разработки новых направлений в теории квантовых полей [Holden, Piene 2009].

Следующий лауреат Абелевской премии, который получил ее в 2005 г., – Питер Дэвид Лакс (Институт математических наук им. Куранта, Нью-Йоркский университет). Сфера интересов этого ученого чрезвычайно широка: интегрируемые системы, ударные волны, гидродинамика. Приятно отметить, что Лакс является почетным доктором Санкт-Петербургского государственного университета.

Премию Абеля П.Д. Лакс получил за новаторский вклад в теорию и применение дифференциальных уравнений в частных производных и в поиск



Питер Дэвид Лакс



Леннарт Аксель
Эдвард Карлесон

их решений. Ученый сумел соединить чистую математику с прикладной [Holden, Piene 2009].

Сфера интересов шведского математика Леннарта Акселя Эдварда Карлесона лежит в области теории функций и математического анализа. Он родился в 1928 г. в Стокгольме. В 1950 г. получил ученую степень доктора, в 1968–1984 гг. был директором Стокгольмского института Миттаг-Лефлера, превратив его в один из самых престижных исследовательских центров в мире. В 1978–1982 гг. он занимал пост президента Международного союза математиков. Член Шведской королевской академии наук, почетный член многих иностранных академий, в том числе Российской.

В 2006 г. Леннарт Карлесон был удостоен Премии имени Абеля за работу, в которой ему удалось строго доказать теорему, сформулированную Жаном-Батистом Фурье [Holden, Piene 2009].

Сриниваса С.Р. Варадхан родился в Ченнае (тогда Мадрас) в 1940 г. [Holden, Piene 2009]. Варадхан получил степень бакалавра в 1959 г. в Президентском колледже Мадраса, а затем перешел в Индийский статистический институт в Калькутте. Он был одним из «знаменитых четырех» (другими были Ранга Рао, К.Р. Партахасарати и Веравалли С. Варадараджан) в ИСИ в 1956–1963 гг. Он получил докторскую степень в ISI в 1963 г. под руководством К.Р. Рао, который организовал присутствие А.Н. Колмогорова на защите диссертации Варадхана.

Сриниваса С.Р. Варадхан считается ученым сразу двух стран, Индии и США. Норвежская академия наук присудила ему Премию Абеля в 2007 г. за фундаментальный вклад в теорию вероятностей. Он разработал новое направление теории вероятностей – теорию больших отклонений.

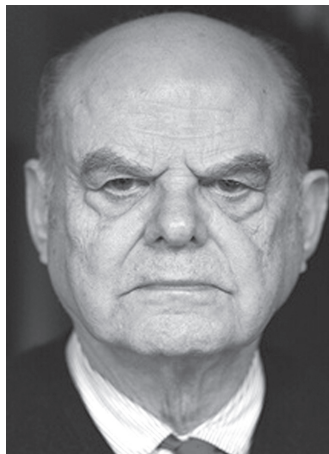
В 2008 г. лауреатами Премии Абеля также стали сразу двое ученых: Жак Титс и Джон Григгс Томпсон.



Сриниваса
С.Р. Варадхан



Жак Титс

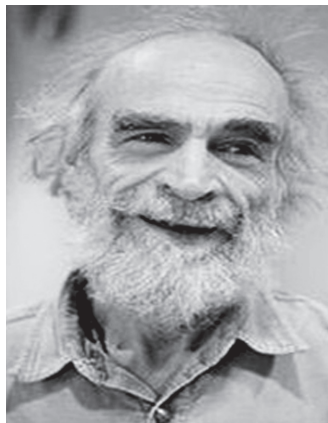


Джон Григгс Томпсон

Джон Г. Томпсон, профессор Флоридского университета, почетный профессор Кембриджского университета, и Жак Титс, почетный профессор Парижского Коллежа де Франс, были удостоены такой высокой награды за фундаментальные достижения в области алгебры, в частности за создание современной теории групп. Исследования обоих лауреатов дополняют друг друга: Джон Томпсон сконцентрировался на конечных группах, а Жак Титс работал в основном в области теории линейных групп. Достижения Джона Томпсона и Жака Титса оказали огромное влияние на математику [Holden, Piene 2014].

Лауреатом Премии Абеля 2009 г. стал Михаил Леонидович Громов, профессор французского Института высших научных исследований (IHES), за его революционизирующий вклад в геометрию.

Одна из старейших областей математики – геометрия всегда привлекала самое пристальное внимание величайших математиков мира. В то же время за последние 50 лет даже в этой отрасли удалось получить новые научные результаты. Михаил Громов развил идеи, позволяющие по-новому взглянуть на геометрию и другие сферы математики [Holden, Piene 2014].

Михаил Леонидович
Громов



Джон Торренс Тэйт

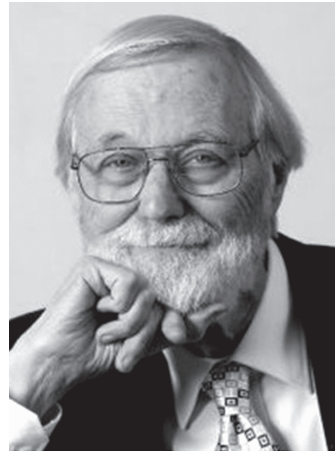
Обладателем международной Абелевской премии 2010 г. назван Джон Торренс Тэйт из Техасского университета в Остине. Члены международного комитета отметили, в частности, что Тэйт награжден «за его новаторские исследования, повлиявшие на современную математику». Многие из основных направлений исследований в области алгебраической теории чисел и арифметической геометрии стали возможными только благодаря изобретательному вкладу и блестящим знаниям и интуиции Джона Тэйта. Нет сомнения в том, что Джон Тэйт оставил свой неизгладимый след в современной математике.

Работы в области математики Джона Уилларда Милнора (Университет Стони Брук, Нью-Йорк, США) отличаются живой фантазией, неожиданностью и красотой. Милнор является фантастически талантливым популяризатором сложной математики. Ему часто приходилось браться за сложные, современные темы, ранее никогда не обсуждавшиеся в книгах. На основе новых и оригинальных идей им написан ряд современных, но уже выдержавших испытание временем трудов, отличающихся поразительной ясностью и проницательностью. Как вдохновенный композитор, одновременно являющийся исключительно талантливым исполнителем, Джон Милнор – это в равной степени и первооткрыватель, и популяризатор.

Премия Абеля Джону Уилларду Милнору была присуждена «за новаторские открытия в топологии, геометрии и алгебре» в 2011 г.

Академия наук Норвегии в 2012 г. присудила Премию Абеля Эндре Семереди из Математического института Альфреда Реньи, Будапешт, Венгрия, и Университета штата Нью-Джерси, США.

Дискретная математика – это наука, занимающаяся изучением таких структур, как графы, последовательности,



Джон Уиллард
Милнор

перестановки, а также геометрические конфигурации. Математика таких структур составляет фундамент информатики и теории информации. Например, информационные сети, такие как Интернет, можно описать и проанализировать, используя инструменты теории графов, а построение эффективных вычислительных алгоритмов зависит в решающей степени от глубины знаний и понимания дискретной математики. Комбинаторика дискретных структур также является важным компонентом многих областей чистой математики, таких как теория чисел, теория вероятности, алгебра, геометрия и анализ.

Главным достижением Эндре Семереди является разработка оригинальных новых методов в дискретной математике и комбинаторике [Holden, Piene 2014].

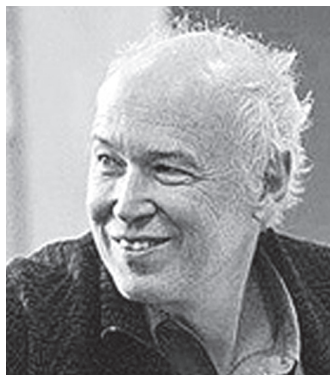
Пьер Делинь из Принстонского Института перспективных исследований (США) был удостоен Премии Абеля в 2013 г. «за плодотворный вклад в алгебраическую геометрию и преобразующее воздействие его трудов на теорию чисел, теорию представлений и связанные с ними области». Со временем алгебраическая геометрия претерпела многочисленные изменения, расширилась и стала центральной дисциплиной, глубоко связанной почти со всеми областями математики. Пьер Делинь сыграл решающую роль во многих этих преобразованиях.

Яков Григорьевич Синай окончил механико-математический факультет МГУ. Советский и американский математик стал лауреатом Премии Абеля в 2014 г.

Синай изучал многие разделы математической физики, получив основополагающие результаты: теорию случайных



Эндре Семереди



Пьер Делинь

Яков Григорьевич
Синай



Джон Форбс Нэш-младший, Луис Ниренберг

блужданий в случайной среде, фазовые переходы (теория Пирогова–Синая), одномерную турбулентность (работы Мазеля–Синая–Ханина по уравнению Бюргерса), теорию ренормгруппы (работы с Блехером), спектр дискретных операторов Шредингера. Синай воспитал многих учеников и повлиял на целое поколение ученых [Летопись 2020].

В 2015 г. лауреатами Премии Абеля стали ученые из США Джон Нэш и Луис Ниренберг «за яркий и плодотворный вклад в теорию нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и ее приложения к геометрическому анализу» [Премия 2020].

Многолетняя научная деятельность Джона Ф. Нэша-младшего связана с Принстонским университетом и Массачусетским технологическим институтом. Луи Ниренберг работал в Институте математических наук им. Куранта Нью-Йоркского университета.

Кроме математики, Джон Ф. Нэш-младший много и успешно работал в области теории игр и математике принятия решений, за которые в 1994 г. ему была присуждена Нобелевская премия по экономике.

Ниренберг предпочитал работать в коллективе и плодотворно сотрудничал с другими учеными. Результаты этих работ названы в честь него и его сотрудников, такие как неравенство Джона–Ниренберга, неравенства Гальярдо–Ниренберга, теория псевдодифференциальных операторов Кона–Ниренберга.

Работы Нэша и Ниренберга в области уравнений с частными производными первоначально предназначались для описания физических явлений. Однако они смогли также применить теорию нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных к задачам геометрического анализа.

В 2016 г. Премия Абеля была присуждена Эндрю Джону Уайлсу «за его потрясающее доказательство Великой теоремы Ферма путем применения теории модулярности для полустабильных эллиптических кривых, открывающее новую эру в теории чисел» [Премия 2020].

Эндрю Джон Уайлс – английский и американский математик, профессор математики Принстонского университета, член научного совета Института математики Клэя.

Основные исследования и научные работы Эндрю Джона Уайлса относятся к теории модулярности для полустабильных эллиптических кривых, с использованием которой в 1994 г. была доказана теорема Ферма.

В 2017 г. за «решающую роль в развитии математической теории вейвлетов (всплесков)» [Премия 2020] Премия Абеля была присуждена французскому математику Иву Мейеру. Вейвлеты представляют собой семейство математических функций, которые позволяют анализировать частотные компоненты данных.

Работы Ива Мейера в области теории вейвлетов находятся на стыке математики, компьютерных наук и информационных технологий и имеют огромное прикладное значение: для обработки, сжатия и хранения информации, обнаружения гравитационных волн, а также лежат в основе алгоритмов обработки графических изображений.

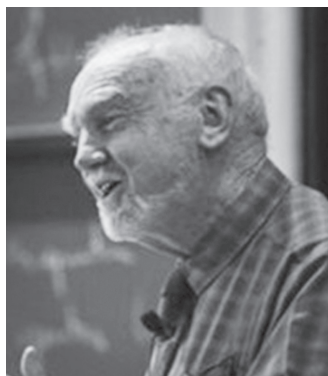
Канадскому математику Роберту Ленглендсу в 2018 г. Премия Абеля была присуждена за его дальновидную программу, связывающую теорию представлений с теорией чисел [Премия 2020].



Сэр
Эндрю Джон Уайлс



Ив Мейер



Роберт Ленглендс

Роберт Ленглендс был отмечен за научные работы 1967 г., в результате которых была теоретически обоснована связь между двумя областями математики: теорией чисел и теорией представлений. Теория Ленглендса была настолько радикальной и плодотворной, что механизмы по соединению этих областей математической науки легли в основу многолетней программы («программа Ленглендса»).

За последние десятилетия сотни лучших математиков мира участвовали в этой программе. В современной математике не существует проекта, который имел бы такой широкий охват, над которым работало бы так много людей и были получены такие фундаментальные результаты. Именно поэтому программу Ленглендса можно рассматривать как единую теорию математики.

В 2019 г. Премия Абеля была присуждена американскому математику Карен Кескалла Уленбек «за ее новаторские достижения в области геометрических уравнений в частных производных, калибровочной теории и интегрируемых систем, а также за фундаментальное влияние ее работы на анализ, геометрию и математическую физику» [Премия 2020].

Ее теории произвели революцию в понимании минимальных поверхностей, таких как поверхности, образованные мыльными пузырями, и более общих проблем минимизации в более высоких измерениях

Разработанные Карен Уленбек инструменты и методы глобального анализа применяются каждым специалистом в области геометрии и анализа. Также ее работа является основой современных геометрических моделей в математике и физике. Работа Уленбек в области калибровочной теории является важной для математического понимания моделей в физике элементарных частиц и общей теории относительности.

Карен Уленбек является первой женщиной – лауреатом Премии Абеля. Кроме того, в 1990 г. она стала второй женщиной в истории, выступившей с пленарной лекцией на Международном конгрессе математиков. В настоящее время она работает в Университете штата Техас в Остине и в Принстонском университете.

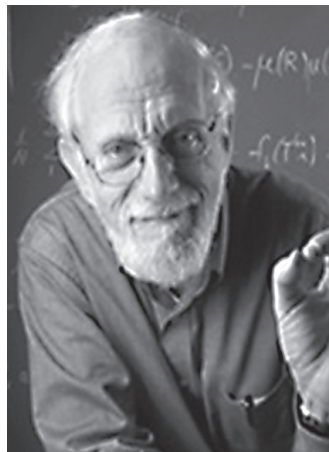


Карен Кескалла
Уленбек

В 2020 г. Премии Абеля была присуждена израильскому математику Гилелю Фюрстенбергу из Еврейского



Григорий Александрович
Маргулис



Гилель
Фюрстенберг

университета (Иерусалим) и американскому математику Григорию Маргулису из Йельского университета (Нью-Хейвен, Коннектикут) за «новаторство в использовании методов вероятности и динамики в теории групп, теории чисел и комбинаторике» [Премия 2020].

Гилель Фюрстенберг и Григорий Маргулис разработали методику случайных блужданий для исследования математических объектов. Случайное блуждание – это последовательность случайных шагов, при этом каждый новый шаг не зависит от предыдущего.

Они представили вероятностные методы для решения многих открытых задач в теориях групп, чисел, а также комбинаторике и теории графов. Использование Фюрстенбергом и Маргулисом вероятностных методов и случайных блужданий для решения сложнейших задач в различных областях математики произвели революцию в математической науке.

Г. Фюрстенберг является лауреатом премии Израиля и премии Вольфа.

Г. Маргулис в 1967 г. окончил мехмат МГУ, является лауреатом премии им. Лобачевского и премии Вольфа. В 1978 г., в возрасте 32 лет, ему была присуждена премия Филдса.

Заключение

Норвежская академия наук и литературы начиная с 2003 г. ежегодно объявляет имя лауреата престижной Премии Абеля – аналога Нобелевской премии для математиков.

За восемнадцать лет с момента учреждения Премии Абеля ее лауреатами стали выдающиеся ученые 10 стран мира: Франции, Великобритании, США, Венгрии, Швеции, Индии, России, Канады, Ливана и Израиля; для сравнения: среди лауреатов Нобелевской премии в основном преобладают ученые США.

В 2015 г. лауреатом Премии Абеля стал Джон Ф. Нэш-младший. Примечательно, что в 1994 г. ему была присуждена Нобелевская премия по экономике за работы в области теории игр и математики принятия решений.

Трижды премия была присуждена сразу двум ученым, а в 2019 г. лауреатом этой престижной премии среди математиков впервые стала женщина – Карен Кескалла Уленбек – профессор, американский математик.

Наши соотечественники получали Премию Абеля дважды.

Сегодня уже ясно, что лауреаты Премии Абеля получили фундаментальные результаты и решения, которые важны не только сами по себе: они одновременно открыли новые горизонты научных исследований; при этом многие итоги их исследований имеют высокую практическую значимость и к настоящему моменту себя далеко не исчерпали.

Особую ценность результаты исследования лауреатов Премии Абеля имеют еще и потому, что для их получения в отличие, например, от физиков или химиков не требуется никакого специального, зачастую достаточно сложного оборудования. Все их достигнутые результаты обусловлены лишь глубиной и широтой человеческого разума, оригинальностью и остротой мышления, новым взглядом на очевидное. При этом результаты, достигнутые этими выдающимися учеными, кроме всего прочего, являются мощной побудительной движущей силой для развития молодых ученых-исследователей.

Литература

Кант 1966 – Кант И. Метафизические начала естествознания // Кант И. Сочинения: В 6 т. М.: Мысль, 1966. Т. 6.

Летопись 2020 – Летопись Московского университета [Электронный ресурс]. URL: <http://letopis.msu.ru/peoples/2502> (дата обращения 8 мая 2020).

- Ломоносов 1950 – *Ломоносов М.В.* Элементы математической химии // Ломоносов М.В. Полное собрание сочинений: В 11 т. М.; Л.: АН СССР, 1950. Т. 1.
- Премия 2020 – Премия Абеля [Электронный ресурс]. URL: <https://www.abelprize.no> (дата обращения 8 мая 2020).
- Holden, Piene 2009 – *The Abel Prize 2003 – 2007. The First Five Years* / H. Holden, R. Piene (eds.). Berlin: Springer Science & Business Media, 2009.
- Holden, Piene 2014 – *The Abel Prize 2008 – 2012* / H. Holden, R. Piene (eds.). Berlin: Springer Science & Business Media, 2014.

References

- Abel (2020), *The Abel Prize*, [Online], available at: URL: <https://www.abelprize.no/binfil/download.php?tid=69553> (Accessed 8 May 2020).
- Chronicle (2020), *Chronicle of Moscow University*, [Online], available at: URL: <http://letopis.msu.ru/peoples/2502> (Accessed 8 May 2020).
- Holden, H. and Piene, R. (eds.) (2009), *The Abel Prize: 2003–2007 The First Five Years*, Springer Science & Business Media, Berlin, Germany.
- Holden, H. and Piene, R. (eds.) (2014), *The Abel Prize 2008–2012*, Springer Science & Business Media, Berlin, Germany.
- Kant, I. (1966), “Metaphysical principles of natural science”, in Kant, I. *Works. In 6 vols.*, vol. 6, Mysl', Moscow, USSR.
- Lomonosov, M.V. (1950), “Elements of mathematical chemistry”, in Lomonosov, M.V. *Complete works. In 11 vols.*, vol. 1, AN USSR, Moscow, Leningrad, USSR.

Информация об авторе

Наталья В. Гришина, кандидат технических наук, доцент, Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия; 125993, Россия, Москва, Миусская пл., 6; grnat@rambler.ru

Information about the author

Nataliya V. Grishina, Cand.of Sci. (Computer Science), associate professor, Russian State University for the Humanities, Moscow, Russia; bld. 6, Miusskaya Sq., Moscow, Russia, 125993; grnat@rambler.ru

Пространство для хранения информации, свободное от декогерентности

Максим С. Земляк

*Российский государственный гуманитарный университет,
Москва, Россия, diff9974@gmail.com*

Надежда Б. Викторова

*Российский государственный гуманитарный университет,
Москва, Россия, nbvictorova@list.ru*

Аннотация. Квантовые системы представляют большой интерес в текущих реалиях. Квантовые компьютеры не являются альтернативой классическим. Скорее их можно отнести к классу устройств, специализирующихся на отдельной группе задач. Однако ключевым моментом в проектировании квантовых компьютеров является вопрос времени декогерентности. Для борьбы с этим явлением разрабатываются различные методы изоляции квантовой системы, включая использование крайне низких температур и высокого вакуума. Кроме этого, одним из способов борьбы с декогерентностью являются темные состояния в связи с тем, что система атомов, находящаяся в таком состоянии не способна взаимодействовать со светом – поглощать либо испускать фотоны. В данной работе рассматриваются различные системы из трехуровневых атомов. Представлены графические схемы двух типов атомов – λ -атомов, ν -атомов. Вводится понятие темного квантового состояния и понятие семьи квантового состояния. Приводится алгоритм нахождения размерности и базиса подпространства темных состояний. По алгоритму рассчитываются размерности и базисы подпространств темных состояний в этих системах.

Ключевые слова: квантовая информатика, квантовые вычисления, математика, кутрит, темные состояния, семья квантового состояния

Для цитирования: Земляк М.С., Викторова Н.Б. Пространство для хранения информации, свободное от декогерентности // Вестник РГГУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2020. № 2. С. 72–84. DOI: 10.28995/2686-679X-2020-2-72-84

Decoherence-free storage information space

Maksim S. Zemlyak,

*Russian State University for the Humanities,
Moscow, Russia, diff9974@gmail.com*

Nadezhda B. Victorova,

*Russian State University for the Humanities,
Moscow, Russia, nbvictorova@list.ru*

Abstract. Quantum systems are of great interest in current realities. Quantum computers are not an alternative to the classic. Rather, they can be attributed to the class of devices specializing in a separate group of tasks. However, a key issue in the design of quantum computers is the issue of decoherence time. To combat that phenomenon, various methods of isolating a quantum system are being developed, including the use of extremely low temperatures and high vacuum. In addition, one of the ways to combat decoherence is to use dark states, due to the fact that a system of atoms in this state is not able to interact with light – absorb or emit photons. In this paper, various systems of three-level atoms are considered. Schemes of two types of atoms are represented graphically – λ -atoms, ν -atoms. The concept of a dark quantum state and the concept of a family of a quantum state are introduced. An algorithm for finding the dimension and basis of the subspace of dark states is presented. According to the algorithm, the dimensions and bases of the subspaces of dark states in these systems are calculated.

Keywords: quantum informatics, quantum computing, mathematics, qutrit, dark states, quantum state family

For citation: Zemlyak, M.S. and Victorova, N.B. (2020), “Decoherence-free storage information space”, *RSUH/RGGU Bulletin. “Information Science. Information Security. Mathematics” Series*, no. 2, pp. 72–84, DOI: 10.28995/2686-679X-2020-2-72-84

Введение

Общие теоретические вопросы, связанные с одноуровневыми, двухуровневыми и трехуровневыми атомами, рассмотрены ранее, в частности, в работе [Lambropoulos, Petrosyan 2007].

Важность и значение явления темных состояний в квантовых системах описаны в работе [Ожигов 2019]. Там же рассмотрена структура подпространства темных состояний в двухуровневых атомах.

В данной статье рассмотрим эти явления в различных системах атомов с тремя энергетическими уровнями.

Определение 1. Кутрит – квантовая ячейка, имеющая три возможных состояния [Kulagin, Ladunov, Ozhigov, Skovoroda, Victorova 2018].

Для кутритов обозначим множество базисных состояний $K = \{0, 1, 2\}$. В случае многоуровневой модели атомов структура записи состояния квантовой системы принимает вид $|n_\Omega, n_\omega\rangle_{ph} |a_1 a_2 \dots a_n\rangle$, где $a_n \in K$.

Определение 2. Состояние $|\psi\rangle$ является темным (в RWA) [Kulagin, Ladunov, Ozhigov, Skovoroda, Victorova 2018], если

$$|\psi\rangle \in Ker(\overline{\delta_\omega} + \overline{\delta_\Omega}),$$

где $\overline{\delta_\omega}$ ($\overline{\delta_\Omega}$) есть сумма по всем атомам операторов δ_ω (δ_Ω) для одного атома, где δ_ω (δ_Ω) соответствует переходам с энергетического уровня j в энергетический уровень i с частотой ω (Ω) (табл. 1).

Также определение темного состояния можно найти в [Lambropoulos, Petrosyan 2007].

Трехуровневые атомы можно разделить на 2 группы – λ -атомы, в которых запрещен переход между 1 и 0 энергетическими уровнями (рис. 1) и ν -атомы, в которых запрещен переход между 2 и 1 энергетическими уровнями (рис. 2).

Таблица 1

Вид операторов δ_ω (δ_Ω) для λ атомов и ν атомов

| | λ атом | ν атом |
|----------|--|--|
| ω | $\delta_{12} n\rangle = \begin{cases} 1\rangle, n = 2 \\ 0, n \neq 2 \end{cases}$ | $\delta_{01} n\rangle = \begin{cases} 0\rangle, n = 1 \\ 0, n \neq 1 \end{cases}$ |
| Ω | $\delta_{02} n\rangle = \begin{cases} 0\rangle, n = 2 \\ 0, n \neq 2 \end{cases}$ | $\delta_{02} n\rangle = \begin{cases} 0\rangle, n = 2 \\ 0, n \neq 2 \end{cases}$ |

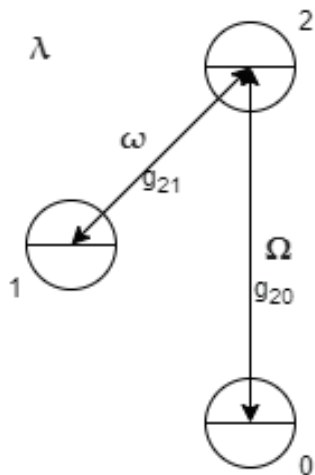


Рис. 1. λ -атом

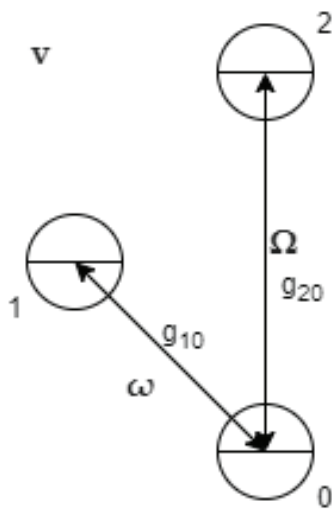


Рис. 2. ν -атом

На рёбрах в схеме показаны интенсивности перехода между соответствующими энергетическими уровнями.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу описания подпространства темных состояний в различных системах атомов.

Определение 3. Семейей состояния $|\Psi\rangle$ называется множество таких базисных состояний, что при однократном применении гамильтониана возможен переход в данное состояние с испусканием фотона.

Другими словами, если возможен переход $|\Psi'\rangle \rightarrow |\Psi\rangle$, то состояние $|\Psi'\rangle$ будет входить в семью $[[\Psi]]$ по той частоте, по которой происходит данный переход.

Для решения поставленной задачи необходимо составить семьи всех базисных состояний и систему уравнений, удовлетворяющую уравнениям этих семей:

$$\sum_{j \in [[\Psi]]_{\text{баз.}} \omega} g_{j\omega} \lambda_j = 0.$$

Алгоритм решения задачи

1. Для каждого базисного состояния составить уравнения семей $[[\Psi]]_{\omega}$ и $[[\Psi]]_{\Omega}$.
2. Составить систему уравнений вида

$$\begin{cases} \sum_{j \in [[\Psi]]_{\text{баз.}} \omega} g_{j\omega} \lambda_j = 0 \\ \sum_{j \in [[\Psi]]_{\text{баз.}} \Omega} g_{j\Omega} \lambda_j = 0 \end{cases}.$$

В результате этого шага получим матрицу коэффициентов M размера $2 * 3^n \times 3^n$, где n – общее количество атомов в системе.

3. Искомой размерностью подпространства будет $(3^n - \text{rang}(M))$.

4. Искомым базисом будет фундаментальная система решений данной системы.

Результаты

Программная реализация алгоритма позволила получить следующие результаты. Ввиду большой размерности систем уравнений базис пространства удалось рассчитать только в системах для двух и трех атомов.

2 атома

Конфигурация $2\lambda + 0\nu$

| | |
|---|--|
| Размерность подпространства темных состояний | 4 |
| Базис подпространства темных состояний (без нормировки) | $\lambda_0 00\rangle$ $\lambda_1 01\rangle$ $\lambda_3 10\rangle$ $\lambda_4 11\rangle$ |
| Решение системы нелинейных уравнений (критерий нормировки, пример одного решения) | $\lambda_0 = -1$ $\lambda_1 = -1$ $\lambda_3 = -1$ $\lambda_4 = -1$ |

Конфигурация $1\lambda + 1\nu$

| | |
|---|--|
| Размерность подпространства темных состояний | 3 |
| Базис подпространства темных состояний (без нормировки) | $\lambda_0 00\rangle$ $\lambda_3 10\rangle$ $\lambda_6 20\rangle - \lambda_2 02\rangle - \lambda_4 11\rangle$ |
| Решение системы нелинейных уравнений (критерий нормировки, пример одного решения) | $\lambda_0 = -1$ $\lambda_2 = -\frac{g_{2\Omega}\sqrt{-g_{1\omega}^2\lambda_4^2 - g_{2\omega}^2\lambda_6^2 + g_{2\omega}^2}}{g_{1\Omega}g_{2\omega}}$ $\lambda_3 = -1$ |

Конфигурация $0\lambda + 2\nu$

| | |
|---|--|
| Размерность подпространства темных состояний | 3 |
| Базис подпространства темных состояний (без нормировки) | $\lambda_0 00\rangle$ $-\lambda_1 01\rangle + \lambda_3 10\rangle$ $-\lambda_2 02\rangle + \lambda_6 20\rangle$ |
| Решение системы нелинейных уравнений (критерий нормировки, пример одного решения) | $\lambda_0 = -1$ $\lambda_1 = -\frac{g_{2\omega}\sqrt{-(\lambda_3 - 1)(\lambda_3 + 1)}}{g_{1\omega}}$ $\lambda_2 = -\frac{g_{2\Omega}\sqrt{-(\lambda_6 - 1)(\lambda_6 + 1)}}{g_{1\Omega}}$ |

3 атома

Конфигурация $3\lambda + 0\nu$

| | |
|---|--|
| Размерность подпространства темных состояний | 9 |
| Базис подпространства темных состояний (без нормировки) | $\lambda_0 000\rangle$ $\lambda_1 001\rangle$ $\lambda_3 010\rangle$ $\lambda_4 011\rangle$ $\lambda_9 100\rangle$ $\lambda_{10} 101\rangle$ $\lambda_{12} 110\rangle$ $\lambda_{13} 111\rangle$ $\lambda_{11} 102\rangle - \lambda_{15} 120\rangle - \lambda_{19} 201\rangle$ $+ \lambda_{21} 210\rangle$ $- \lambda_5 012\rangle + \lambda_7 021\rangle$ |
| Решение системы нелинейных уравнений (критерий нормировки, пример одного решения) | $\lambda_0 = -1$ $\lambda_1 = -1$ $\lambda_{10} = -1$ |

| | |
|--|--|
| | λ_{11} – значение под таблицей $\lambda_{12} = -1$ $\lambda_{13} = -1$ $\lambda_3 = -1$ $\lambda_4 = -1$ $\lambda_9 = -1$ |
|--|--|

$$\lambda_{11} = -\frac{\sqrt{-g_{1\Omega}^2 g_{1\omega}^2 g_{2\omega}^2 \lambda_7^2 - g_{1\Omega}^2 g_{1\omega}^2 g_{3\omega}^2 \lambda_5^2 - g_{1\omega}^2 g_{2\Omega}^2 g_{2\omega}^2 \lambda_{19}^2 - g_{1\omega}^2 g_{3\Omega}^2 g_{3\omega}^2 \lambda_{21}^2 + g_{1\omega}^2 g_{3\Omega}^2 g_{3\omega}^2 - g_{2\omega}^2 g_{3\Omega}^2 g_{3\omega}^2 \lambda_{15}^2}}{g_{2\Omega} g_{2\omega} g_{3\omega}}$$

Конфигурация $2\lambda + 1\nu$

| | |
|---|--|
| Размерность подпространства темных состояний | 8 |
| Базис подпространства темных состояний (без нормировки) | $\lambda_0 000\rangle$ $\lambda_3 010\rangle$ $\lambda_6 020\rangle - \lambda_2 002\rangle - \lambda_4 011\rangle$ $\lambda_9 100\rangle$ $\lambda_{12} 110\rangle$ $\lambda_{15} 120\rangle - \lambda_{13} 111\rangle - \lambda_{11} 102\rangle$ $\lambda_{18} 200\rangle - \lambda_{10} 101\rangle - \lambda_2 002\rangle$ $\lambda_{21} 210\rangle - \lambda_{13} 111\rangle - \lambda_5 012\rangle$ |
| Решение системы нелинейных уравнений (критерий нормировки, пример одного решения) | $\lambda_0 = -1$ $\lambda_{10} = -\frac{\sqrt{g_{1\Omega}^2 g_{1\omega}^2 \lambda_4^2 + g_{1\Omega}^2 g_{3\omega}^2 \lambda_6^2 - g_{1\Omega}^2 g_{3\omega}^2 - g_{2\Omega}^2 g_{3\omega}^2 \lambda_{18}^2 - g_{2\Omega}^2 g_{3\omega}^2}}{g_{1\omega} g_{2\Omega}}$ |

| | |
|--|--|
| | $\lambda_{11} = -\frac{\sqrt{g_{1\Omega}^2 g_{1\omega}^2 \lambda_5^2 + g_{3\Omega}^2 g_{1\omega}^2 \lambda_{21}^2 - g_{3\Omega}^2 g_{1\omega}^2 - g_{3\Omega}^2 g_{2\omega}^2 \lambda_{15}^2 - g_{3\Omega}^2 g_{2\omega}^2}}{g_{2\omega} g_{2\Omega}}$ $\lambda_{12} = -1$ $\lambda_{13} = -\frac{g_{3\omega} \sqrt{-g_{1\Omega}^2 \lambda_5^2 - g_{3\Omega}^2 \lambda_{21}^2 + g_{3\Omega}^2}}{g_{2\omega} g_{3\Omega}}$ $\lambda_2 = -\frac{g_{3\Omega} \sqrt{-g_{1\omega}^2 \lambda_4^2 - g_{3\omega}^2 \lambda_6^2 + g_{3\omega}^2}}{g_{3\omega} g_{2\Omega}}$ $\lambda_3 = -1$ $\lambda_9 = -1$ |
|--|--|

Конфигурация 1λ + 2ν

| | |
|---|--|
| Размерность подпространства темных состояний | 7 |
| Базис подпространства темных состояний (без нормировки) | $\lambda_0 000\rangle$ $\lambda_3 010\rangle - \lambda_1 001\rangle$ $\lambda_6 020\rangle - \lambda_2 002\rangle$ $\lambda_9 100\rangle$ $\lambda_{12} 110\rangle - \lambda_{10} 101\rangle$ $\lambda_{15} 120\rangle - \lambda_{11} 102\rangle$ $\lambda_{18} 200\rangle - \lambda_{10} 101\rangle - \lambda_2 002\rangle$ |
| Решение системы нелинейных уравнений (критерий нормировки, пример одного решения) | $\lambda_0 = -1$ $\lambda_1 = -\frac{g_{3\omega} \sqrt{-(\lambda_3 - 1)(\lambda_3 + 1)}}{g_{2\omega}}$ $\lambda_{10} = -\frac{g_{3\omega} \sqrt{g_{1\Omega}^2 \lambda_6^2 - g_{1\Omega}^2 - g_{2\Omega}^2 \lambda_{18}^2 + g_{2\Omega}^2}}{g_{1\omega} g_{2\Omega}}$ |

| | |
|--|--|
| | $\lambda_{11} = -\frac{g_{3\Omega}\sqrt{-(\lambda_{15}-1)(\lambda_{15}+1)}}{g_{2\Omega}}$ $\lambda_{12} = -\frac{\sqrt{-g_{1\Omega}^2g_{2\omega}^2\lambda_6^2 + g_{1\Omega}^2g_{2\omega}^2 + g_{2\Omega}^2g_{1\omega}^2 + g_{2\Omega}^2g_{2\omega}^2\lambda_{18}^2 - g_{2\Omega}^2g_{2\omega}^2}}{g_{1\omega}g_{2\Omega}}$ $\lambda_2 = -\frac{g_{3\Omega}\sqrt{-(\lambda_6-1)(\lambda_6+1)}}{g_{2\Omega}}$ $\lambda_9 = -1$ |
|--|--|

Конфигурация $0\lambda + 3\nu$

| | |
|---|---|
| Размерность подпространства темных состояний | 5 |
| Базис подпространства темных состояний (без нормировки) | $\lambda_0 000\rangle$ $\lambda_3 010\rangle - \lambda_1 001\rangle$ $\lambda_6 020\rangle - \lambda_2 002\rangle$ $\lambda_9 100\rangle - \lambda_1 001\rangle$ $\lambda_{18} 200\rangle - \lambda_2 002\rangle$ |
| Решение системы нелинейных уравнений (критерий нормировки, пример одного решения) | $\lambda_0 = -1$ $\lambda_1 = -\frac{g_{3\omega}\sqrt{-(\lambda_9-1)(\lambda_9+1)}}{g_{1\omega}}$ $\lambda_{18} = -\frac{\sqrt{g_{1\Omega}^2\lambda_6^2 - g_{1\Omega}^2 + g_{2\Omega}^2}}{g_{2\Omega}}$ $\lambda_2 = -\frac{g_{3\Omega}\sqrt{-(\lambda_6-1)(\lambda_6+1)}}{g_{2\Omega}}$ $\lambda_3 = -\frac{\sqrt{g_{1\omega}^2 + g_{2\omega}^2\lambda_9^2 - g_{2\omega}^2}}{g_{1\omega}}$ |

4 атома

Для четырех и пяти атомов удалось рассчитать размерность подпространства темных состояний.

Конфигурация $4\lambda + 0\nu$

| | |
|--|----|
| Размерность подпространства темных состояний | 22 |
|--|----|

Конфигурация $3\lambda + 1\nu$

| | |
|--|----|
| Размерность подпространства темных состояний | 20 |
|--|----|

Конфигурация $2\lambda + 2\nu$

| | |
|--|----|
| Размерность подпространства темных состояний | 17 |
|--|----|

Конфигурация $1\lambda + 3\nu$

| | |
|--|----|
| Размерность подпространства темных состояний | 15 |
|--|----|

Конфигурация $0\lambda + 4\nu$

| | |
|--|----|
| Размерность подпространства темных состояний | 15 |
|--|----|

5 атомов**Конфигурация $5\lambda + 0\nu$**

| | |
|--|----|
| Размерность подпространства темных состояний | 55 |
|--|----|

Конфигурация $4\lambda + 1\nu$

| | |
|--|----|
| Размерность подпространства темных состояний | 48 |
|--|----|

Конфигурация $3\lambda + 2\nu$

| | |
|--|----|
| Размерность подпространства темных состояний | 44 |
|--|----|

Конфигурация $2\lambda + 3\nu$

| | |
|--|----|
| Размерность подпространства темных состояний | 41 |
|--|----|

Конфигурация $1\lambda + 4\nu$

| | |
|--|----|
| Размерность подпространства темных состояний | 37 |
|--|----|

Конфигурация $0\lambda + 5\nu$

| | |
|--|----|
| Размерность подпространства темных состояний | 33 |
|--|----|

Заключение

В данной статье рассмотрены различные пространства трех-уровневых атомов, а также подпространства темных состояний, которые свободны от явления декогерентности. Найдены размерности и базисы подпространств.

Литература

-
- Ожигов 2019 – Ожигов Ю.И. Пространство темных состояний в модели Тависа–Камминга // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2019. Т. 15. № 1. С. 13–26.
- Kulagin, Ladunov, Ozhigov, Skovoroda, Victorova 2018 – *Kulagin A.V., Ladunov V.Y., Ozhigov Y.I., Skovoroda N.A., Victorova N.B.* Homogeneous atomic ensembles and single-mode field: review of simulation results // International Conference on Micro- and Nano-Electronics. Vol. 11022. Zvenigorod, 2018. Vol. 11022, pp. 1–12.
- Lambropoulos, Petrosyan 2007 – *Lambropoulos P., Petrosyan D.* Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information. Berlin; New York: Springer, 2007.

References

- Kulagin, A.V., Ladunov, V.Y., Ozhigov, Y.I., Skovoroda, N.A., and Victorova, N.B. (2018), “Homogeneous atomic ensembles and single-mode field: review of simulation results”, *Proc. Int. Conference on Micro- and Nano-Electronics*. Vol. 11022, Zvenigorod, Russia, pp. 1–12.
- Lambropoulos, P. and Petrosyan, D. (2007), *Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information*, Springer, Berlin, Germany.
- Ozhigov, Y.I. (2019), “The space of dark states in the Tavis-Cummings model”, *Sovremennye informatsionnye tekhnologii i IT-obrazovanie*. Vol. 15, no. 1, pp. 13–26.

Информация об авторах

Максим С. Земляк, Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия; 125993, Россия, Москва, Миусская пл., д. 6; diff9974@gmail.com

Надежда Б. Викторова, кандидат физико-математических наук, доцент, Российский государственный гуманитарный университет, Москва, Россия; 125993, Россия, Москва, Миусская пл., 6; nbvictorova@list.ru

Information about the authors

Maxim S. Zemlyak, Russian State University for the Humanities, Moscow, Russia; bld. 6, Miusskaya Sq., Moscow, Russia, 125993; diff9974@gmail.com

Nadezhda B. Victorova, Cand.of Sci. (Physics and Mathematics), associate professor, Russian State University for the Humanities, Moscow, Russia; bld. 6, Miusskaya Sq., Moscow, Russia, 125993; nbvictorova@list.ru

О разрешимости смешанной задачи с помощью оператора Лапласа с нелокальными граничными условиями

Шакирбай Г. Касимов

*Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека;
Ташкентский филиал НИЯУ МИФИ,
Ташкент, Узбекистан, shokiraka@mail.ru*

Махкамбек М. Бабаев

*Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
Ташкент, Узбекистан, babayevm@mail.ru*

Аннотация. В данной работе изучена задача с начальными функциями и граничными условиями для дифференциальных уравнений дробного порядка в частных производных с запаздывающим аргументом по времени, со степенными операторами Лапласа с пространственными переменными и нелокальными граничными условиями в классах Соболева. Решение начально-граничной задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций многомерной спектральной задачи. У спектральной задачи найдены собственные значения и построена соответствующая система собственных функций. Показано, что эта система собственных функций является полной и образует базис Рисса в подпространствах Соболева. На основании полноты системы собственных функций доказана теорема единственности решения задачи. В подпространствах Соболева доказано существование регулярного решения поставленной начально-граничной задачи.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных с запаздывающим аргументом, дробная производная по времени, начально-граничная задача, спектральный метод, собственные значения, собственные функции, полнота, базис Рисса, единственность, существование, ряд

Для цитирования: Касимов Ш.Г., Бабаев М.М. О разрешимости смешанной задачи с помощью оператора Лапласа с нелокальными граничными условиями // Вестник РГТУ. Серия «Информатика. Информационная безопасность. Математика». 2020. № 2. С. 85–104. DOI: 10.28995/2686-679X-2020-2-85-104

On the solvability of a mixed problem with degree Laplace operators with nonlocal boundary conditions

Shakirbai G. Kasimov

*Mirzo Ulugbek National University of Uzbekistan;
Tashkent branch of NRNU MEPhI,
Tashkent, Uzbekistan, shokiraka@mail.ru*

Mahkambek M. Babaev

*National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek,
Tashkent, Uzbekistan, babayevm@mail.ru*

Abstract. The paper studies a problem with initial functions and boundary conditions

for partial differential partial equations of fractional order in partial derivatives with a delayed time argument, with degree Laplace operators with spatial variables and nonlocal boundary conditions in Sobolev classes. The solution of the initial boundary-value problem is constructed as the series' sum in the eigenfunction system of the multidimensional spectral problem. The eigenvalues are found for the spectral problem and the corresponding system of eigenfunctions is constructed. It is shown that the system of eigenfunctions is complete and forms a Riesz basis in the Sobolev subspace. Based on the completeness of the eigenfunctions system the uniqueness theorem for solving the problem is proved. In the Sobolev subspaces the existence of a regular solution to the stated initial-boundary problem is proved.

Keywords: Partial differential equation with delay argument, fractional time derivative, initial-boundary value problem, spectral method, eigenvalues, eigenfunctions, completeness, Riesz basis, uniqueness, existence, series

For citation: Kasimov, Sh.G. and Babaev, M.M. (2020), "On the solvability of a mixed problem with degree Laplace operators with nonlocal boundary conditions", *RSUH/RGGU Bulletin. "Information Science. Information Security. Mathematics" Series*. 2020, no. 2, pp. 85–104, DOI: 10.28995/2686-679X-2020-2-85-104

Постановка задачи

Как известно, в физике твердого тела изучаются так называемые фрактальные среды, в частности явления диффузии в них. В одной из моделей диффузия в сильно пористой среде описывается уравнением типа уравнения теплопроводности, но с дробной производной по временной координате с запаздывающим аргументом. Многие задачи о колебаниях балок и пластин, которые имеют

большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям [Тихонов, Самарский 1977], [Стретт 1955], [Тимошенко, Янг, Уивер 1985].

Отметим также, что к уравнению колебаний балки приходят во многих задачах при расчете устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей [Тимошенко, Янг, Уивер 1985].

В данной работе рассматривается дифференциальное уравнение с дробной производной вида

$$D_{0t}^{\alpha} u(x, t) + a^2 (-\Delta)^{\nu} u(x, t) + b^2 (-\Delta)^{\nu} u(x, t - \tau) = f(x, t),$$

$$(x, t) \in Q, \quad l-1 < \alpha \leq l \tag{1}$$

с начальными функциями

$$\begin{cases} D_{0t}^{\alpha-j} u(x, t)|_{t=+0} = \varphi_j(x), & x = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) \in \Pi, \\ j = 1, 2, \dots, l-1, \\ D_{0t}^{\alpha-l} u(x, t) = \varphi_l(x, t), \\ (x, t) = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t) \in \Pi \times [-\tau, 0] \end{cases} \tag{2}$$

и краевыми условиями

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_j (-\Delta)^i u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)|_{x_j=0} + \beta_j (-\Delta)^i u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)|_{x_j=\pi} = 0, \\ 1 \leq j \leq p, \\ \beta_j \frac{\partial (-\Delta)^i u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j} \Big|_{x_j=0} + \alpha_j \frac{\partial (-\Delta)^i u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j} \Big|_{x_j=\pi} = 0, \\ 1 \leq j \leq p, \\ (-\Delta)^i u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)|_{x_j=0} = (-\Delta)^i u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)|_{x_j=\pi}, \\ p+1 \leq j \leq q, \\ \frac{\partial (-\Delta)^i u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j} \Big|_{x_j=0} = \frac{\partial (-\Delta)^i u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j} \Big|_{x_j=\pi} = 0, \\ p+1 \leq j \leq q, \\ (-\Delta)^i u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)|_{x_j=0} = 0, \quad q+1 \leq j \leq N, \\ (-\Delta)^i u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)|_{x_j=\pi} = 0, \\ q+1 \leq j \leq N, \quad 1 \leq p \leq q \leq N, \quad i = 0, 1, \dots, \nu-1, \end{array} \right.$$

где $a, b, \tau, T > 0$ – постоянные, $l \in \mathbb{Z}$, $(x, t) = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t) \in Q$, $Q = \prod \times (0, T)$, $T > 0$, $\mathfrak{D} = (0, \pi) \times \dots \times (0, \pi)$, $\alpha_i = const$, $\beta_i = const$, $\alpha_j \neq 0$, $\beta_j \neq 0$, $|\alpha_j| \neq |\beta_j|$ при $1 \leq j \leq p$ и достаточно гладкие функции $f(x, t)$, $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, l - 1$, $\varphi_l(x, t)$ при каждом $t > -\tau$ разлагаемые функции по собственным функциям $\{v_n(x), n \in \mathbb{Z}^N\}$, система собственных функций спектральной задачи:

$$(-\Delta)^{\nu} \Delta v(x) = \mu v(x), \tag{4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_j (-\Delta)^i v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) |_{x_j=0} + \beta_j (-\Delta)^i v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) |_{x_j=\pi} = 0, \\ 1 \leq j \leq p, \\ \beta_j \frac{\partial (-\Delta)^i v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N)}{\partial x_j} |_{x_j=0} + \alpha_j \frac{\partial (-\Delta)^i v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N)}{\partial x_j} |_{x_j=\pi} = 0, \\ 1 \leq j \leq p, \\ (-\Delta)^i v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) |_{x_j=0} = (-\Delta)^i v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) |_{x_j=\pi}, \\ p+1 \leq j \leq q, \\ \frac{\partial (-\Delta)^i v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N)}{\partial x_j} |_{x_j=0} = \frac{\partial (-\Delta)^i v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N)}{\partial x_j} |_{x_j=\pi} = 0, \tag{5} \\ p+1 \leq j \leq q, \\ (-\Delta)^i v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) |_{x_j=0} = 0, \quad q+1 \leq j \leq N, \\ (-\Delta)^i v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) |_{x_j=\pi} = 0, \quad q+1 \leq j \leq N, \\ 1 \leq p \leq q \leq N, \quad i = 0, 1, \dots, \nu - 1. \end{array} \right.$$

Здесь при $\alpha < 0$ дробный интеграл D^{α} имеет вид

$$D_{at}^{\alpha} u(x, t) = \frac{\text{sign}(t - a)}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t u(x, \tau) d\tau |t - \tau|^{\alpha+1},$$

если $\alpha = 0$, то $D_{at}^{\alpha} u(x, t) = u(x, t)$, а при $l - 1 < \alpha \leq l, l \in \mathbb{Z}$, дробная производная имеет вид

$$D_{at}^\alpha u(x, t) = \text{sign}^l(t - a) \frac{d^l}{dt^l} D_{at}^{\alpha-l} u(x, t) = \frac{\text{sign}^{l+1}(t - a)}{\Gamma(l - \alpha)} \frac{d^l}{dt^l} \int_a^t \frac{u(x, \tau) \cdot d\tau}{|t - \tau|^{\alpha-l+1}}.$$

Введем пространство $W_2^S(0, l)$ с нормой

$$\|f\|_{W_2^S(0, l)}^2 = \|f\|_{L_2(0, l)}^2 + \|D^S f\|_{L_2(0, l)}^2,$$

где S – произвольное натуральное число, при этом $W_2^0(0, l) = L_2(0, l)$.

Скалярное произведение в пространстве $W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ вводится так:

$$\begin{aligned} (f(x), g(x))_{W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)} &= (f(x), g(x))_{L_2(\Pi)} + \sum_{j_1=1}^N \left(D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} f(x), D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} g(x) \right)_{L_2(\Pi)} + \\ &+ \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq N} \left(D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} D_{x_{j_2}}^{s_{j_2}} f(x), D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} D_{x_{j_2}}^{s_{j_2}} g(x) \right)_{L_2(\Pi)} + \dots + \\ &+ \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_N \leq N} \left(D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} D_{x_{j_2}}^{s_{j_2}} \dots D_{x_{j_N}}^{s_{j_N}} f(x), D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} D_{x_{j_2}}^{s_{j_2}} \dots D_{x_{j_N}}^{s_{j_N}} g(x) \right)_{L_2(\Pi)}. \end{aligned}$$

Соответственно, норма в пространстве $W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ вводится так:

$$\begin{aligned} \|f\|_{W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)}^2 &= \|f\|_{L_2(\Pi)}^2 + \sum_{j_1=1}^N \left\| D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} f(x) \right\|_{L_2(\Pi)}^2 + \\ &+ \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq N} \left\| D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} D_{x_{j_2}}^{s_{j_2}} f(x) \right\|_{L_2(\Pi)}^2 + \dots + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_N \leq N} \left\| D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} D_{x_{j_2}}^{s_{j_2}} \dots D_{x_{j_N}}^{s_{j_N}} f(x) \right\|_{L_2(\Pi)}^2. \end{aligned}$$

*Полнота системы собственных функций
в подпространствах Соболева*

Обозначим через $V_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ множество всех функций $f(x) \in W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$, удовлетворяющих граничным условиям (5).

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $\alpha_j \neq 0, \beta_j \neq 0, |\alpha_j| \neq |\beta_j|$ действительные числа при каждом $1 \leq j \leq p$ и

$$\rho = \max_{1 \leq j \leq p} \sqrt{\theta_j^2 + 2 \left(\frac{\theta_j}{\sqrt{2}} + (\varphi_j + 1)^{s_j} - 1 \right)^2} \cdot \sigma(s_j) < 1,$$

где $\sigma(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sigma(s_j) = 1$, при $s_j > 0$,

$$\theta_j = \sqrt{2} \cdot \max_{x \in [0, \pi]} |e^{i\varphi_j x} - 1|, \lambda_{m_j} = 2m_j + \varphi_j, \varphi_j = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{-2\alpha_j \beta_j}{\alpha_j^2 + \beta_j^2}, m_j \in \mathbb{Z}.$$

Тогда система собственных функций

$$\left\{ v_{m_1, \dots, m_N}(x_1, \dots, x_N) \right\}_{(m_1, \dots, m_p) \in \mathbb{Z}^p, (m_{p+1}, \dots, m_q) \in \mathbb{Z}^{q-p}, (m_{q+1}, \dots, m_N) \in \mathbb{N}^{N-q}} =$$

$$= \left\{ \prod_{j=1}^p \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\text{sign}(\beta_j^2 - \alpha_j^2) \cdot \alpha_j \sin \lambda_{m_j} x_j + \beta_j \cos \lambda_{m_j} x_j}{\sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2} \cdot \sqrt{1 + |\lambda_{m_j}|^{2s_j}}} \right\}_{(m_1, \dots, m_p) \in \mathbb{Z}^p} \times$$

$$\times \left\{ \prod_{j=p+1}^q \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + |2m_j|^{2s_j}}} \exp(i2m_j x_j) \right\}_{(m_{p+1}, \dots, m_q) \in \mathbb{Z}^{q-p}} \times$$

$$\times \left\{ \prod_{j=q+1}^N \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + |m_j|^{2s_j}}} \sin(m_j x_j) \right\}_{(m_{q+1}, \dots, m_N) \in \mathbb{N}^{N-q}}$$

спектральной задачи (4)–(5) образует полную ортонормированную систему в классах Соболева $V_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$.

Теорема 2. Пусть $\alpha_j \neq 0, \beta_j \neq 0, |\alpha_j| \neq |\beta_j|$ действительные числа при каждом $1 \leq j \leq p$ и

$$\rho = \max_{1 \leq j \leq p} \sqrt{\theta_j^2 + 2 \left(\frac{\theta_j}{\sqrt{2}} + (\varphi_j + 1)^{s_j} - 1 \right)^2} \cdot \sigma(s_j) < 1,$$

где $\sigma(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sigma(s_j) = 1$, при $s_j > 0$,

$$\theta_j = \sqrt{2} \cdot \max_{x \in [0, \pi]} |e^{i\varphi_j x} - 1|, \lambda_{m_j} = 2m_j + \varphi_j,$$

$$\varphi_j = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{-2\alpha_j \beta_j}{\alpha_j^2 + \beta_j^2}, m_j \in \mathbb{Z}, s_j > k + \frac{N}{2}, k \geq 0, k \in \mathbb{Z}.$$

Тогда ряд Фурье функции $f(x) \in V_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi) \cap C^k(\Pi)$ по ортонормированным собственным функциям

$$\left\{ \nu_{m_1 \dots m_N}(x_1, \dots, x_N) \right\}_{(m_1, \dots, m_p) \in \mathbb{Z}^p, (m_{p+1}, \dots, m_q) \in \mathbb{Z}^{q-p}, (m_{q+1}, \dots, m_N) \in \mathbb{N}^{N-q}} =$$

$$= \left\{ \prod_{j=1}^p \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\text{sign}(\beta_j^2 - \alpha_j^2) \cdot \alpha_j \sin \lambda_{m_j} x_j + \beta_j \cos \lambda_{m_j} x_j}{\sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2} \cdot \sqrt{1 + |\lambda_{m_j}|^{2s_j}}} \right\}_{(m_1, \dots, m_p) \in \mathbb{Z}^p} \times$$

$$\times \left\{ \prod_{j=p+1}^q \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+|2m_j|^{2s_j}}} \exp(i2m_j x_j) \right\}_{(m_{p+1}, \dots, m_q) \in \mathbb{Z}^{q-p}} \times$$

$$\times \left\{ \prod_{j=q+1}^N \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+|m_j|^{2s_j}}} \sin(m_j x_j) \right\}_{(m_{q+1}, \dots, m_N) \in \mathbb{N}^{N-q}},$$

спектральной задачи (4)–(5) сходится по норме пространства $C^k(\Pi)$ к функции $f(x)$.

Доказательство теоремы 1 и 2 можно найти в работе [Kasimov, Ataev 2018].

Существование и единственность решения начально-граничной задачи

Регулярным решением уравнения (1) в области

$Q = \Pi \times (0, T)$, $T > 0$ назовем функцию $u(x, t)$ из класса

$$u(x, t) \in C(\bar{Q}), D_{0t}^{\alpha-i} u(x, t) \in C(\bar{Q}), i = 1, 2, \dots, l-1,$$

$$D_{0t}^{\alpha-l} u(x, t) \in C(\overline{\Pi \times (-\tau, T)}), D_{0t}^{\alpha} u(x, t) \in C(Q),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} ((-\Delta)^{v-1} u)(x, t) \in C(\bar{Q}), (-\Delta)^v u(x, t) \in C(Q), j = 1, \dots, N$$

и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x, t) \in Q$.

Обозначим через $V_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ множество всех функций $u(x, t) \in W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$, удовлетворяющих граничным условиям (3).

Функцию $u(x, t)$ назовем регулярным решением задачи (1)–(3) в области $Q = \Pi \times (0, T)$, если функция $u(x, t)$ удовлетворяет начальным функциям и граничным условиям (2) и (3).

Пусть функция $u(x, t) \in W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ с показателем $s_1 = s_2 = \dots = s_N \equiv 2\nu + \frac{N}{2}$, $\theta = -[-\alpha]$ удовлетворяет уравнению (1) во всех точках $(x, t) \in Q$ и удовлетворяет начальным и граничным условиям (2) и (3). Тогда функция $u(x, t)$ является регулярным решением задачи (1) – (3) в области $Q = \Pi \times (0, T)$. Введем функции

$$T_{m_1, \dots, m_N}(t) = \int_{\Pi} u(y, t) \tilde{v}_{m_1, \dots, m_N}(y) dy, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{m_1, \dots, m_N}(x_1, \dots, x_N) &= \prod_{j=1}^p \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\text{sign}(\beta_j^2 - \alpha_j^2) \cdot \alpha_j \sin \lambda_{m_j} x_j + \beta_j \cos \lambda_{m_j} x_j}{\sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}} \times \\ &\times \prod_{j=p+1}^q \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(i2m_j x_j) \cdot \prod_{j=q+1}^N \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sin(m_j x_j) \end{aligned} \quad (7)$$

при

$$(m_1, \dots, m_p) \in \mathbb{Z}^p, \quad (m_{p+1}, \dots, m_q) \in \mathbb{Z}^{q-p}, \quad (m_{q+1}, \dots, m_N) \in \mathbb{N}^{N-q}.$$

В силу (1)–(3) неизвестные функции $T_{m_1, \dots, m_N}(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$D_{0t}^{\alpha} T_{m_1, \dots, m_N}(t) + \mu_{m_1, \dots, m_N} (a^2 T_{m_1, \dots, m_N}(t) + b^2 T_{m_1, \dots, m_N}(t - \tau)) = f_{m_1, \dots, m_N}(t) \quad (8)$$

и начальным функциям

$$\begin{cases} D_{0t}^{\alpha-j} T_{m_1, \dots, m_N}(t) \Big|_{t=0} = (\varphi_j)_{m_1, \dots, m_N}, & j = 1, 2, \dots, l-1, \\ D_{0t}^{\alpha-l} T_{m_1, \dots, m_N}(t) = (\varphi_l)_{m_1, \dots, m_N}(t), & t \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (9)$$

где

$$f_{m_1, \dots, m_N}(t) = \int_{\Pi} f(y, t) \tilde{v}_{m_1, \dots, m_N}(y) dy, \quad (\varphi_j)_{m_1, \dots, m_N} = \int_{\Pi} \varphi_j(y) \tilde{v}_{m_1, \dots, m_N}(y) dy, \\ j = 1, 2, \dots, l - 1,$$

$$(\varphi_l)_{m_1, \dots, m_N}(t) = \int_{\Pi} \varphi_l(y, t) \tilde{v}_{m_1, \dots, m_N}(y) dy, \quad \mu_{m_1, \dots, m_N} = \left(\sum_{j=1}^N \lambda_{m_j}^2 \right)^{\nu} = \\ = \left(\sum_{j=1}^p \left(2m_j + \frac{1}{\pi} \arccos \frac{-2\alpha_j \beta_j}{\alpha_j^2 + \beta_j^2} \right)^2 + \sum_{j=p+1}^q (2m_j)^2 + \sum_{j=q+1}^N (m_j)^2 \right)^{\nu}, \quad m_j \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, применяя метод шагов (см., например, [Стретт 1955], [Тимошенко, Янг, Уивер 1985]), получим:

$$D_{0t}^{\alpha} T_{m_1, \dots, m_N}(t) + \mu_{m_1, \dots, m_N} a^2 T_{m_1, \dots, m_N}(t) = \\ = f_{m_1, \dots, m_N}(t) - \mu_{m_1, \dots, m_N} b^2 (D_{0t}^{l-\alpha} \varphi_l)_{m_1, \dots, m_N}(t) \tag{10}$$

при $0 \leq t \leq \tau$ и начальные условия

$$D_{0t}^{\alpha-j} T_{m_1, \dots, m_N}(t) \Big|_{t=0} = (\varphi_j)_{m_1, \dots, m_N}, \quad j = 1, 2, \dots, l \tag{11}$$

где $(\varphi_l)_{m_1, \dots, m_N} = (\varphi_l)_{m_1, \dots, m_N}(0)$.

Решение задачи Коши (10), (11) известно (см., например, [Псху 2005]), и оно имеет вид

$$T_{m_1, \dots, m_N}(t) = \sum_{j=1}^l (\varphi_j)_{m_1, \dots, m_N} \cdot t^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha-j+1}(-\mu_{m_1, \dots, m_N} a^2 \cdot t^{\alpha}) + \\ + \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha, \alpha}(-\mu_{m_1, \dots, m_N} a^2 (t-\xi)^{\alpha}) \left[\begin{matrix} f_{m_1, \dots, m_N}(\xi) - \\ \mu_{m_1, \dots, m_N} b^2 (D_{0t}^{l-\alpha} \varphi_l)_{m_1, \dots, m_N}(\xi) \end{matrix} \right] d\xi \tag{12}$$

при $0 \leq t \leq \tau$, где

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{z^q}{\Gamma(\alpha q + \beta)}. \quad (13)$$

Далее для отрезка $\tau \leq t \leq 2\tau$ из уравнения (8), получим:

$$\begin{aligned} D_{0t}^{\alpha} T_{m_1, \dots, m_N}(t) + \mu_{m_1, \dots, m_N} a^2 T_{m_1, \dots, m_N}(t) = \\ = f_{m_1, \dots, m_N}(t) - \mu_{m_1, \dots, m_N} b^2 \cdot {}_1 T_{m_1, \dots, m_N}(t - \tau). \end{aligned} \quad (14)$$

Из решения (12) получаем начальные условия вида

$$D_{0t}^{\alpha-j} T_{m_1, \dots, m_N}(t) \Big|_{t=\tau} = {}_1 T_{j, m_1, \dots, m_N}, \quad j = 1, 2, \dots, l. \quad (15)$$

Аналогично задаче Коши (10), (11) решение задачи Коши (14), (15) известно, и оно имеет вид

$$\begin{aligned} {}_2 T_{m_1, \dots, m_N}(t) = \sum_{j=1}^l {}_1 T_{j, m_1, \dots, m_N} \cdot (t - \tau)^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha-j+1}(-\mu_{m_1, \dots, m_N} a^2 \cdot (t - \tau)^{\alpha}) + \\ \int_{\tau}^t (t - \xi)^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha, \alpha}(-\mu_{m_1, \dots, m_N} a^2 (t - \xi)^{\alpha}) \left[f_{m_1, \dots, m_N}(\xi) - \right. \\ \left. \mu_{m_1, \dots, m_N} b^2 \cdot {}_1 T_{m_1, \dots, m_N}(\xi - \tau) \right] d\xi \end{aligned} \quad (16)$$

при $\tau \leq t \leq 2\tau$.

Далее применяя метод шагов для каждого отрезка $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$, из уравнения (8), получим:

$$\begin{aligned} D_{0t}^{\alpha} T_{m_1, \dots, m_N}(t) + \mu_{m_1, \dots, m_N} a^2 T_{m_1, \dots, m_N}(t) = f_{m_1, \dots, m_N}(t) - \\ - \mu_{m_1, \dots, m_N} b^2 \cdot {}_n T_{m_1, \dots, m_N}(t - n\tau). \end{aligned} \quad (17)$$

Соответствующие начальные условия имеют вид

$$D_{0t}^{\alpha-j} T_{m_1, \dots, m_N}(t) \Big|_{t=n\tau} = {}_n T_{j, m_1, \dots, m_N}, \quad j = 1, 2, \dots, l \quad (18)$$

Решая задачу Коши (17), (18), получим:

$$\begin{aligned}
 {}_{(n+1)}T_{m_1, \dots, m_N}(t) &= \sum_{j=1}^l {}_nT_{j, m_1, \dots, m_N} \cdot (t - n\tau)^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha-j+1} \left(-\mu_{m_1, \dots, m_N} a^2 \cdot (t - n\tau)^\alpha \right) + \\
 &\int_{n\tau}^t (t - \xi)^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha, \alpha} \left(-\mu_{m_1, \dots, m_N} a^2 (t - \xi)^\alpha \right) \left[\begin{array}{l} f_{m_1, \dots, m_N}(\xi) - \mu_{m_1, \dots, m_N} b^2 \cdot \\ \cdot {}_nT_{m_1, \dots, m_N}(\xi - n\tau) \end{array} \right] d\xi
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

при $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$.

Поскольку функции (6) на каждом отрезке $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$ построены в явном виде с помощью формул (12), (16), (19), то на основании полноты системы собственных функций (7) в $L_2(\Pi)$ нетрудно доказать единственность решения задачи (1)–(3). Пусть $f(x, t) \equiv 0$ и $\varphi_j(x) \equiv 0, j = 1, \dots, l$. Тогда из формул (12), (16), (19) и (6) следует, что

$$\int_{\Pi} u(y, t) \tilde{v}_{m_1, \dots, m_N}(y) dy = 0 \tag{20}$$

при всех $(m_1, \dots, m_p) \in Z^p, (m_{p+1}, \dots, m_q) \in Z^{q-p}, (m_{q+1}, \dots, m_N) \in Z^{N-q}$ и любом $t \in [0, T]$. Отсюда, в силу полноты системы собственных функций (7) в $L_2(\Pi)$, вытекает, что $u(x, t) = 0$ почти всюду в области Π при любом $t \in [0, T]$. Как известно, если функция $u(x, t)$ непрерывна на \bar{Q} , то $u(x, t) \equiv 0$ в \bar{Q} . Это доказывает единственность решения задачи (1)–(3).

При каждом $t > -\tau$ функция $u(x, t) \in V_2^{0, s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ по переменной x является функцией из класса $V_2^{0, s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$. Поэтому, рассматривая $t > -\tau$ как параметр, решение задачи (1)–(3) будем

искать из класса $V_2^{0, s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}$ (Q) в виде суммы ряда по системе собственных функций (7) спектральной задачи (4)–(5):

$$u(x, t) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{+\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{+\infty} T_{m_1, \dots, m_N}(t) \cdot \tilde{v}_{m_1, \dots, m_N}(x), \quad (21)$$

где $\tilde{v}_{m_1, \dots, m_N}(x)$ определяется по формуле (7), и $T_{m_1, \dots, m_N}(t)$ определяется по формулам (12), (16) и (19).

После подстановки (12) в (21) получим единственное решение задачи (1)–(3) в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{+\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{+\infty} \left[\sum_{j=1}^l (\varphi_j)_{m_1, \dots, m_N} \cdot t^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha-j+1}(-\mu_{m_1 \dots m_N} a^2 \cdot t^\alpha) + \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha, \alpha}(-\mu_{m_1, \dots, m_N} \cdot a^2 (t-\xi)^\alpha) \times \right. \quad (22)$$

$$\left. \times \left(f_{m_1, \dots, m_N}(\xi) - \mu_{m_1, \dots, m_N} \cdot b^2 \cdot (D_{0t}^{l-\alpha} \varphi_l)_{m_1, \dots, m_N}(\xi) \right) d\xi \cdot \tilde{v}_{m_1, \dots, m_N}(x_1, \dots, x_N) \right]$$

при $0 \leq \tau \leq t$. Аналогично после подстановки (16) в (21) мы получим в отрезке $\tau \leq t \leq 2\tau$ единственное решение задачи (1) – (3) в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{+\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{+\infty} \left[\sum_{j=1}^l T_{j, m_1, \dots, m_N} \cdot (t-\tau)^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha-j+1}(-\mu_{m_1, \dots, m_N} a^2 \cdot (t-\tau)^\alpha) + \int_\tau^t (t-\xi)^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha, \alpha}(-\mu_{m_1, \dots, m_N} a^2 (t-\xi)^\alpha) \left[f_{m_1, \dots, m_N}(\xi) - \mu_{m_1, \dots, m_N} b^2 \cdot T_{m_1, \dots, m_N}(\xi-\tau) \right] d\xi \times \right. \quad (23)$$

$$\left. \times \tilde{v}_{m_1, \dots, m_N}(x_1, \dots, x_N) \right].$$

Следовательно, после подстановки (19) в (21) мы получим в отрезке $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$ единственное решение задачи (1) – (3) в виде ряда

$$\begin{aligned}
 & u(x, t) = \\
 & = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{+\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{+\infty} \left[\sum_{j=1}^l {}_n T_{j, m_1, \dots, m_N} \cdot (t - n\tau)^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha-j+1} \left(\begin{matrix} -\mu_{m_1, \dots, m_N} a^2 \cdot \\ \cdot (t - n\tau)^\alpha \end{matrix} \right) \right] + \\
 & + \int_{n\tau}^t (t - \xi)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(-\mu_{m_1, \dots, m_N} a^2 (t - \xi)^\alpha \right) \left[\begin{matrix} f_{m_1, \dots, m_N}(\xi) - \\ -\mu_{m_1, \dots, m_N} b^2 \cdot {}_n T_{m_1, \dots, m_N}(\xi - n\tau) \end{matrix} \right] d\xi \times \\
 & \times \tilde{v}_{m_1, \dots, m_N}(x_1, \dots, x_N) \Big]. \tag{24}
 \end{aligned}$$

Обозначим через $\overset{0}{H}^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ множество всех функций $u(x, t) \in H^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$, удовлетворяющих граничным условиям (3).

Поскольку система собственных функций (7) спектральной задачи (4), (5) образует базис Рисса в пространстве Соболева

$\overset{0}{H}^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$, то любая функция из этого класса разлагается единственным образом в ряд Фурье, сходящийся по норме пространства $H^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$. Поэтому ряды (22), (23) и (24) сходятся в $H^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ соответственно в отрезках $t \in [0, \tau]$, $t \in [\tau, 2\tau]$ и $t \in [n\tau, (n+1)\tau]$. Выясним условия существования решения из

класса $\overset{0}{V}^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$. Согласно теореме 1, система собственных функций (7) спектральной задачи (4), (5) образует базис Рисса в пространствах Соболева $\overset{0}{H}^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ и $\overset{0}{V}^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$. Поэтому справедливо неравенство

$$\left\| u(x, t) \right\|_{C^{2\nu, 2\nu, \dots, 2\nu}(\Pi)}^2 \leq c_8 \left\| u(x, t) \right\|_{H^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)}^2 \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq c_9 \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{+\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{+\infty} \left| \sum_{j=1}^l (\varphi_j)_{m_1, \dots, m_N} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot t^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha-j+1} \left(-\mu_{m_1 \dots m_N} a^2 \cdot t^\alpha \right) + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha, \alpha} \left(-\mu_{m_1, \dots, m_N} \cdot a^2 (t-\xi)^\alpha \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(f_{m_1, \dots, m_N}(\xi) - \mu_{m_1, \dots, m_N} \cdot b^2 \cdot (D_{0t}^{l-\alpha} \varphi_l)_{m_1, \dots, m_N}(\xi) \right) d\xi \right|^2 \times \prod_{k=1}^N (1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}) < \infty \end{aligned} \quad (25)$$

при $0 \leq t \leq \tau$. Далее,

$$\begin{aligned} &\|u(x, t)\|_{C^{2\nu, 2\nu, \dots, 2\nu}(\Pi)}^2 \leq c_8 \|u(x, t)\|_{H^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)}^2 \leq \\ &\leq c_9 \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{+\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{+\infty} \left| \sum_{j=1}^l T_{j, m_1, \dots, m_N} \cdot (t-\tau)^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha-j+1} \left(-\mu_{m_1, \dots, m_N} a^2 \cdot (t-\tau)^\alpha \right) + \right. \\ &\quad \left. + \int_\tau^t (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(-\mu_{m_1, \dots, m_N} a^2 (t-\xi)^\alpha \right) \left[f_{m_1, \dots, m_N}(\xi) - \mu_{m_1, \dots, m_N} b^2 \cdot T_{m_1, \dots, m_N}(\xi-\tau) \right] d\xi \right|^2 \times \\ &\quad \times \prod_{k=1}^N (1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}) < \infty, \end{aligned} \quad (26)$$

при $\tau \leq t \leq 2\tau$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &\|u(x, t)\|_{C^{2\nu, 2\nu, \dots, 2\nu}(\Pi)}^2 \leq c_8 \|u(x, t)\|_{H^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)}^2 \leq \\ &\leq c_9 \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{+\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{+\infty} \left| \sum_{j=1}^l T_{j, m_1, \dots, m_N} \cdot (t-n\tau)^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha-j+1} \left(-\mu_{m_1, \dots, m_N} a^2 (t-n\tau)^\alpha \right) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{n\tau}^t (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(-\mu_{m_1, \dots, m_N} a^2 (t-\xi)^\alpha \right) \left[f_{m_1, \dots, m_N}(\xi) - \mu_{m_1, \dots, m_N} b^2 \cdot T_{m_1, \dots, m_N}(\xi-n\tau) \right] d\xi \right|^2 \times \\ &\quad \times \prod_{k=1}^N (1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}) < \infty \end{aligned} \quad (27)$$

при $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$.

По теореме вложения Соболева условие (25), (26) и (27) является достаточным для существования регулярного решения задачи (1)–(3) из класса $V_2^{0, s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ с показателем $s_1 = s_2 = \dots = s_N = 2\nu + \frac{N}{2}$, $\theta = -[-\alpha]$.

Если $0 < \alpha < 2$, то, с учетом оценки функции Миттаг–Леффлера (см., например, [Podlubny 1999])

$$\begin{aligned} |E_{\alpha, \alpha-j+1}(\mu_{m_1, \dots, m_N} t^\alpha)| &\leq \frac{C}{1 + |\mu_{m_1, \dots, m_N} t^\alpha|}, \\ |E_{\alpha, \alpha}(\mu_{m_1, \dots, m_N} (t - \tau)^\alpha)| &\leq \frac{C}{1 + |\mu_{m_1, \dots, m_N} (t - \tau)^\alpha|}, \end{aligned}$$

можно упростить достаточные условия (25), (26) и (27) существования регулярного решения задачи (1)–(3) из класса $V_2^{0, s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ с показателем $s_1 = s_2 = \dots = s_N = 2\nu + \frac{N}{2}$, $\theta = -[-\alpha]$.

Если для любого $j = 1, 2, \dots, l$ и $0 \leq t \leq \tau$

$$\begin{aligned} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{+\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{+\infty} \left(\left| (\varphi_j)_{m_1, \dots, m_N} \right|^2 \cdot \prod_{k=1}^N (1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}) \right) < \infty, \\ \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{+\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{+\infty} \left(\left| \int_0^t (t - \xi)^{\alpha-1} \begin{vmatrix} f_{m_1, \dots, m_N}(\xi) - \\ -\mu_{m_1, \dots, m_N} b^2 (D_{0t}^{l-\alpha} \varphi_l)_{m_1, \dots, m_N}(\xi) \end{vmatrix} d\xi \right|^2 \times \right. \\ \left. \times \prod_{k=1}^N (1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}) \right) < \infty, \end{aligned} \tag{28}$$

то условие (25) будет выполнено.

Далее, если для любого $j = 1, 2, \dots, l$ и $\tau \leq t \leq 2\tau$

$$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{+\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{+\infty} \left(\left| (\varphi_j)_{m_1, \dots, m_N} \right|^2 \cdot \prod_{k=1}^N (1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}) \right) < \infty \quad ,$$

$$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{+\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{+\infty} \left(\left| \int_0^t (t - \xi)^{\alpha-1} \left| \begin{array}{l} f_{m_1, \dots, m_N}(\xi) - \\ -\mu_{m_1, \dots, m_N} b^2 (D_{0t}^{l-\alpha} \varphi_l)_{m_1, \dots, m_N}(\xi) \end{array} \right| d\xi \right|^2 \times \right. \\ \left. \times \prod_{k=1}^N (1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}) \right) < \infty \quad ,$$

$$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{+\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{+\infty} \left| T_{j, m_1, \dots, m_N} \right|^2 < +\infty \quad ,$$

$$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{+\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{+\infty} \left(\left| \int_{\tau}^t (t - \xi)^{\alpha-1} \cdot \left| \begin{array}{l} f_{m_1, \dots, m_N}(\xi) - \\ -\mu_{m_1, \dots, m_N} b^2 \cdot T_{m_1, \dots, m_N}(\xi - \tau) \end{array} \right| d\xi \right|^2 \times \right. \\ \left. \times \prod_{k=1}^N (1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}) \right) < \infty \quad , \quad (29)$$

то условие (26) будет выполнено при $\tau \leq t \leq 2\tau$.

Следовательно, если для любого $j = 1, 2, \dots, l$ и $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$

$$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{+\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{+\infty} \left(\left| (\varphi_j)_{m_1, \dots, m_N} \right|^2 \cdot \prod_{k=1}^N (1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}) \right) < \infty \quad ,$$

$$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_q=-\infty}^{\infty} \sum_{m_{q+1}=1}^{+\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{+\infty} \left(\left| \int_0^t (t - \xi)^{\alpha-1} \left| \begin{array}{l} f_{m_1, \dots, m_N}(\xi) - \\ -\mu_{m_1, \dots, m_N} b^2 (D_{0t}^{l-\alpha} \varphi_l)_{m_1, \dots, m_N}(\xi) \end{array} \right| d\xi \right|^2 \times \right. \\ \left. \times \prod_{k=1}^N (1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}) \right) < \infty \quad ,$$

Благодарность

Работа выполнена в соответствии с планом исследований НУУз имени Мирзо Улугбека (тема ОТ–Ф–4–(36+32)).

Acknowledgements

The work was carried out in accordance with the research plan of the Mirzo Ulugbek NUUz (topic OT – F – 4– (36 + 32)).

Литература

- Псху 2005 – *Псху А.В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 200 с.
- Стретт 1955 – *Стретт Дж.В. (лорд Рэлей)* Теория звука. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. 504 с.
- Тимошенко, Янг, Уивер 1985 – *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
- Тихонов, Самарский 1977 – *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.
- Эльсгольц, Норкин 1971 – *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
- Kasimov, Ataev 2018 – *Kasimov Sh.G., Ataev Sh.K.* On solvability of the mixed problem for a partial equation of a fractional order with Laplace operators and nonlocal boundary conditions in the Sobolev classes // *Uzbek Mathematical Journal*. 2018. Vol. 1. P. 73 – 89.
- Podlubny 1999 – *Podlubny I.* Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications. San Diego: Academic Press, 1999.

References

- Kasimov, Sh.G. and Ataev, Sh.K. (2018), “On solvability of the mixed problem for a partial equation of a fractional order with Laplace operators and nonlocal boundary conditions in the Sobolev classes”, *Uzbek Mathematical Journal*, no. 1, pp. 73–89.
- Elsgolts, L.E., and Norkin, S.B. (1971), *Vvedenie v teoriyu differentsialnykh uravneniy s otklonyayushimsya argumentum* [Introduction to the theory of differential equations with deviating argument], Nauka, Moscow, Russia.
- Podlubny, I. (1999), *Fractional differential equations: An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*, Academic Press, San Diego, USA.

- Pskhu, A.V. (2005), *Uraveniya v chastnyh proizvodnyh drobnogo poryadka* [Partial Linear differential equations], Nauka, Moscow, Russia.
- Strutt, J., lord Rayleigh (1955), *Teoria zvuka* [Theory of sound], Vol. 1, Gostekhizdat, Moscow, USSR.
- Tikhonov, A.N. and Samarskii, A.A. (1977), *Uraveniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics], Nauka, Moscow, Russia.
- Timoshenko, S.P., Young, D.Kh. and Weaver, U. (1985), *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Oscillations in engineering], Mechanical Engineering, Moscow, Russia.

Информация об авторах

Шакирбай Г. Касимов, доктор физико-математических наук, профессор, Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Республика Узбекистан; 100174, Республика Узбекистан, Ташкент, ул. Университетская, д. 4;

Ташкентский филиал НИЯУ МИФИ, Ташкент, Республика Узбекистан; 115409, Республика Узбекистан, Ташкент, ул. Хуросон, д. 1; shokiraka@mail.ru

Махкамбек М. Бабаев, аспирант, Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Республика Узбекистан; 100174, Республика Узбекистан, Ташкент, ул. Университетская, д. 4; babayevm@mail.ru

Information about the authors

Shakirbai G. Kasimov, Dr. of Sci. (Physics and Mathematics), professor, Mirzo Ulugbek National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; bld. 4, Universitetskaya Str., Tashkent, 100174, Uzbekistan;

Tashkent branch of NRNU MEPhI, Tashkent, Uzbekistan; bld. 1, Khuroson Str., Tashkent, 115409, Uzbekistan; shokiraka@mail.ru

Mahkambek M. Babayev, postgraduate student, Mirzo Ulugbek National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan; bld. 4, Universitetskaya Str., Tashkent, 100174, Uzbekistan; babayevm@mail.ru

Дизайн обложки
Е.В. Амосова

Корректор
О.Н. Картамышева

Компьютерная верстка
М.Е. Заболотникова

Подписано в печать 28.06.2020.
Формат 60×90¹/₁₆.
Уч.-изд. л. 6,0. Усл. печ. л. 6,6.
Тираж 1050 экз. Заказ № 953

Издательский центр
Российского государственного
гуманитарного университета
125993, Москва, Миусская пл., 6
www.rggi.ru
www.knigirggi.ru