Диффузионное рассеяние волн — модель субквантого уровня?

Е. М. Бениаминов

В статье обсуждаются исследования математических моделей диффузионного рассеяния волн в фазовом пространстве и связь этих моделей с квантовой механикой. В рассматриваемых работах показано, что в этих моделях классического процесса рассеяния волн квантово-механическое описание проявляется как асимптотика после малого промежутка времени. В связи с этим, предлагаемые модели могут рассматриваться как примеры, в которых квантовые описания возникают как приближенные для некоторой гипотетической реальности. Расхождение между предлагаемыми моделями и квантовыми может возникнуть, например, для процессов с быстро меняющейся потенциальной функцией, под действием которой процесс диффузионного рассеяния волн будет выводиться из состояний, описываемых квантовой механикой.

В работе показано, что предлагаемые модели диффузионного рассеяния волн обладают свойством калибровочной инвариантности. Отсюда выводится, что они одинаково описываются во всех инерциальных системах координат, то есть инвариантны при преобразованиях Галилея.

Предлагается программа дальнейших исследований.

1 Введение

Обычно, описание квантовых систем строится путем использования формальных процедур квантования, исходя из классического описания соответствующих механических систем. Поиски смысла этих процедур привлекали многих физиков, начиная с А. Эйнштейна, Интерес к этой теме периодически то затухал, то возрождался вновь. В этом направлении можно назвать теорему фон Неймана, доказанную на этапе становления квантовой механики, о невозможности описания квантовой механики путем введения скрытых параметров [1]. Тем не менее, в 50-х годах в работах Д. Бома и Л. де Бройля [2] предлагается модель квантовой механики со скрытыми параметрами, неудовлетворяющая некоторым исходным условиям теоремы фон Неймана и обладающая странным свойством дальнодействия. В 60-х годах в работе Е. Нельсона [3] предлагается вероятностный подход, получивший название "стохастическое квантование". Тема обоснования квантовой механики волновала многих специалистов (например, Д.И. Блохинцева [4], В.П. Маслова [5], К. Поппера [6] и др.) и была отражена в их публикациях. Имеются работы, в которых проведен подробный анализ проблемы введения скрытых параметов в квантовую механику. К ним нужно отнести широко известную работу Белла [7] о введении скрытых параметров и нелокальности квантовой механики. Интересный анализ этой работы приводится в [8]. В [9] приводится громадный список литературы по основаниям квантовой механики и дается некоторая классификация этих работ. История дискуссии вокруг темы "обоснование квантовой механики" и отношение к этой теме "традиционных физиков" замечательно описаны в книге К. Поппера [6].

Малая популярность альтернативных подходов к обоснованию квантовой механики среди работающих физиков в основном связывается с тем, что они пока не давали серьезных новых результатов. В них не проявлялось большее удобство в вычислениях и эвристике. Однако в последнее время к альтернативным подходам вновь обращается пристальное внимание в связи с задачами и возможностями квантовой оптики, а также в связи с проблемой построения квантовых компьютеров.

В этой статье обсуждаются исследования по построению моделей диффузионного рассеяния волн в фазовом пространстве. Этой темой я занимаюсь в течение ряда лет [10, 11, 12, 13]. В этих моделях квантовое описание процессов возникает как приближенное, асимптотическое при больших значениях некоторых коэффициентов модели.

В указанных статьях делается попытка построить модель квантовых наблюдаемых и квантовых процессов на основе волновых функций на фазовом пространстве. Заметим, что в квантовой механике волновая функция зависит либо только от координат, либо только от импульсов, а в предлагаемом подходе рассматриваются волновые функции, зависящие и от координат, и от импульсов. Эта модель строится также на следующем наблюдении. Фаза волновой функции частицы (естественный скрытый параметр) в квантовой механике меняется во времени даже для стационарных состояний с очень большой скоростью (если учитывать энергию покоя). Эта скорость такова, что перемещение частицы даже с малыми (нерелятивистскими) скоростями может вызывать заметные изменения в фазе волновой функции за счет релятивистского эффекта замедления внутренних процессов движущейся частицы. Уже учет этого эффекта приводит к некоммутативности действия на волновую функцию сдвигов по координатам и импульсам. Заметим еще раз, что в предложенной модели рассматриваются волновые функции на фазовом пространстве (а не конфигурационном) и предполагается, что частица находится в диффузионном процессе, вызывающем случайные сдвиги волны как по координатам, так и по импульсам. Показывается, что классическая модель рассеяния волны с учетом описанных выше предположений приводит к проявлению квантовых эффектов.

В следующих разделах этой статьи несколько подробнее говорится о полученных результатах и направлениях дальнейших исследований.

2 Полученные ранее результаты

В статье [10] вводятся некоторые предположения о процессе наблюдения квантовых явлений, включая введение скрытых параметров, действие группы движения в области скрытых параметров и усреднения наблюдений за счет малых случайных (диффузионных) движений объекта наблюдения. Под наблюдаемой понимается, как и в классической механике, произвольная интегрируемая функция $f(x,p)$ на фазовом пространстве $(x,p) \in R^{2n}$, где x — координата, p — импульс. Если $\rho(x,p)$ — плотность распределения вероятностей нахождения частицы в фазовом пространстве, то математическое ожидание (среднее) $\bar{f}$ наблюдаемой f выражается стандартной формулой:

$$\bar{f} = \int\limits_{R^{2n}} f(x,p)\rho(x,p)dxdp.$$

Далее предполагается, что в экспериментах реализуются не все распределения $\rho(x,p)$, а только вида $\rho(x,p) = |\tilde{\varphi}(x,p)|^2$, где $\tilde{\varphi}(x,p)$ — усредненная в диффузионном процессе волновая функция, заданная в виде комплекснозначной функции $\varphi(x,p)$ на фазовом пространстве. Показывается, что функции вида $\tilde{\varphi}(x,p)$ образуют линейное подпространство $\mathcal{H}$ "стационарных" (усредненных) волновых функций в пространстве всех квадратично интегрируемых функций на R^{2n}. Так как $|\tilde{\varphi}|^2 = \tilde{\varphi}^*\tilde{\varphi}$, где φ^* — комплексно сопряженная функция к функции φ, то среднее значение наблюдаемой f на усредненных плотностях распределения вероятностей задает квадратичную форму на пространстве $\tilde{\varphi} \in \mathcal{H}$ вида:

$$\bar{f} = \int\limits_{R^{2n}} f(x,p)\rho(x,p)dxdp = \int\limits_{R^{2n}} f(x,p)\tilde{\varphi}^*(x,p)\ \tilde{\varphi}(x,p)dxdp = \langle \tilde{\varphi}, A_f\tilde{\varphi}\rangle,$$

где через A_f обозначен линейный оператор на пространстве $\mathcal{H}$, задающий эту квадратичную форму.

Введенный оператор A_f называется оператором наблюдаемой f. Естественно, что спектр этого линейного оператора соответствует возможным значениям наблюдений для наблюдаемой f в условиях принятых предположений.

В работе [10] найдено выражение этого оператора для любой наблюдаемой (функции от координат и импульсов) в зависимости от отношения a/b для коэффициентов диффузии по координатам a^2 и импульсам b^2 процесса усреднения волновых функций. Показывается, что обычный линейный оператор квантовой наблюдаемой не совпадает с построенным в данной работе и отличается сглаживанием функции потенциальной энергии по нормальному распределению с нормальным отклонением, равным $\hbar a/2b$, где $\hbar$ — постоянная Планка. Предполагая, что эта разница вызывает сдвиг спектра атома водорода, наблюдаемый в эксперименте Лэмба, дается оценка величины a/b.

Большим достоинством рассматриваемого подхода, является также возможность выразить для каждой волновой функции системы соответствующую ей плотность распределения вероятностей в фазовом пространстве $\rho(x,p) = |\tilde{\varphi}(x,p)|^2$. Впервые эта задача решалась Вигнером [14], но он построил "квазираспределения" на фазовом пространстве, которые могут быть отрицательными и, следовательно, лишенными физического смысла. Здесь же появляется распределение вероятностей, которое является результатом сглаживания "квазираспределения" Вигнера по нормальному распределению с нормальным отклонением, равным $\hbar a/2b$. Сглаженные распределения Вигнера впервые рассматривал Хусими [15], но смысл параметров сглаживания был неясен.

В конце статьи [10] ставились задачи обобщения результатов на релятивистски инвариантный случай, учет спинов частиц, более общих многообразий фазовых пространств и описания динамики наблюдаемых величин.

Решению последней задачи посвящены стати [11, 12, 13].

В статьях [11, 12] (в статье [11] были анонсированы результаты, полученные в [12]) в продолжение работы [10] рассматривается классическая модель диффузионного процесса для волновой (комплекснозначной) функции $\varphi(x,p,t)$ на фазовом пространстве $(x,p) \in R^{2n}$ в момент времени t. Предполагается, что волновая функция $\varphi(x,p,t)$ в момент времени t удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial H}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\Big) - \frac{i}{\hbar}\Big(H - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_k}p_k\Big)\varphi + \Delta_{a,b}\varphi, \qquad (1)$$

где $$\Delta_{a,b}\varphi = a^2\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{ip_k}{\hbar}\Big)^2\varphi + b^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial p_k^2}\varphi + \frac{abn}{\hbar}\varphi, \qquad (2)$$

где $H(x,p)$ — функция Гамильтона; a^2 и b^2 — коэффициенты диффузий по координатам и импульсам, соответственно, а $\hbar$ — постоянная Планка.

Анализ этого уравнения показал (см. [12] теоремы 4 и 5), что движение в этой модели раскладывается на быстрое и медленное. В результате быстрого движения система за время порядка $\hbar/(ab)$, начиная с произвольной волновой функции на фазовом пространстве, переходит к функции, принадлежащей некоторому особому подпространству "стационарных" для диффузионного процесса волновых функций. Элементы этого подпространства параметризуются волновыми функциями, зависящими только от координат. Медленное движение происходит уже по этому подпространству и описывается уравнением Шредингера, в котором в правой части стоит оператор, совпадающий с обычным для квантовой механики оператором Гамильтона с точностью до слагаемых порядка $a\hbar/b$.

Таким образом, уже в этих статьях показано, что квантово-механическое описание процессов может возникнуть, как приближенное описание классического рассеяния волн в фазовом пространстве. Для рассматриваемой в работе модели это приближение появляется, когда функция Гамильтона мало меняется при изменении координат, импульсов и во времени на интервалах, длина которых имеет порядок, определяемый постоянной Планка $\hbar$ и интенсивностями диффузий a, b.

Исходя из предположений о тепловой причине диффузий, в работе делается оценка коэффициентов диффузий и времени переходного процесса $\hbar/(ab)$ от классического описания процесса, в котором принцип неопределенности Гейзенберга может не выполняться, к квантовому, в котором принцип Гейзенберга уже выполняется. Время переходного процесса имеет порядок $1/T \cdot 10^{-11}$с, где T - температура среды.

Другой интересный вывод работы [11] состоит в том, что решение уравнения (1) может быть представлено в виде интеграла по путям, но не по "мере" Фейнмана [16], смысл которой математически не очень ясен, а по вероятностной мере (аналогичной мере Винера) для броуновского движения, заданного уравнением Фоккера-Планка вида:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial H}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial x_k} + a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} + b^2\frac{\partial^2 f}{\partial p_k^2}\Big), \tag{3}$$

где $f(x,p,t)$ — плотность вероятностей расположения броуновской частицы в фазовом пространстве в момент времени t. В этом случае смысл интеграла по путям может быть лучше обоснован.

Обобщение уравнения (1) на релятивистский случай затрудняется из-за существования в этой модели диффузий по координатам. Такие диффузии предполагают неограниченную скорость в диффузионных скачках. Поэтому следующим шагом в исследовании было построение модели рассеяния волн в фазовом пространстве, в котором диффузия происходит только по импульсам за счет столкновения с частицами среды, находящейся в тепловом равновесии.

В работе [13] вместо уравнения (3) рассматривается уравнение Крамерса [17], [18] вида:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial V}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial p_j} - \frac{p_j}{m}\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big) + \gamma\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial p_j}\Big(p_j f + kTm\frac{\partial f}{\partial p_j}\Big), \tag{4}$$

где $f(x,p,t)$ — плотность распределения вероятностей частицы в фазовом пространстве в момент времени t; m — масса частицы; $V(x)$ — потенциальная функция внешних сил, действующих на частицу; $\gamma = \beta/m$ — коэффициент сопротивления среды, в которой находится частица, на единицу ее массы; k — постоянная Больцмана; T — температура среды.

Тогда вместо уравнения (1) для волновой функции $\varphi(x,p,t)$ рассматривается модифицированное уравнение Крамерса вида:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = A\varphi + \gamma B\varphi, \tag{5}$$

где
$$A\varphi = \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial p_j} - \frac{p_j}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \Big) - \frac{i}{\hbar} \Big(mc^2 + V - \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j^2}{2m} \Big) \varphi \tag{6}$$

и
$$B\varphi = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial p_j} \left(\Big(p_j + i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \Big) \varphi + kTm \frac{\partial \varphi}{\partial p_j} \right). \tag{7}$$

Уравнение (5) получено из уравнения Крамерса (4) добавлением в правую часть слагаемого вида $-i/\hbar(mc^2 + V - p^2/(2m))\varphi$ и заменой в операторе диффузии умножения функции φ на p_j действием оператора $(p_j + i\hbar\partial/\partial x_j)$ на функцию φ.

Добавление слагаемого $-i/\hbar(mc^2 + V - p^2/(2m))\varphi$ связано с тем дополнительным физическим требованием, что волновая функция в точке (x, p) гармонически колеблется с частотой $1/\hbar(mc^2 + V - p^2/(2m))$ по времени.

Требование гармонического колебания волновой функции φ в точке (x, p) с большой частотой $1/\hbar(mc^2 + V - p^2/(2m))$ в случае, когда mc^2 существенно больше величины V, приводит к тому, что сдвиг волновой функции по координате x_j с сохранением собственного времени в точке (x, p) вызывает фазовый сдвиг в колебании функции φ. При этом оператор бесконечно малого сдвига $\partial/\partial x_j$ заменяется на оператор $\partial/\partial x_j - ip_j/\hbar$. (Более подробное обоснование см. в [12].) Соответственно, если этот оператор умножить на $i\hbar$, то получим оператор $p_j + i\hbar\partial/\partial x_j$, использованный в модифицированном операторе диффузии B.

Для уравнения (5) в [13] получены результаты, аналогичные результатам статьи [12]. Показывается, что и в этом случае процесс, описываемый уравнением (5), при больших $\gamma = \beta/m$ проходит несколько стадий. В течение первой, быстрой стадии, волновая функция переходит в одно из "стационарных" состояний того же вида, что и для уравнения (5). Во второй, медленной стадии, волновая функция меняется в подпространстве "стационарных" состояний в соответствии с уравнением Шредингера. Кроме того, показывается, что на третьей стадии диссипация процесса приводит к декогеренции волновой функции, и любая суперпозиция состояний приходит к одному из собственных состояний оператора Гамильтона.

В работе [13] показано также, что если, наоборот, сопротивление среды на единицу массы частицы $\gamma = \beta/m$ мало, и в уравнении (5) можно пренебречь слагаемым с множителем γ, то в рассматриваемой модели плотность распределения вероятностей $\rho = |\varphi|^2$ удовлетворяет стандартному уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{\partial \rho}{\partial p_j} - \frac{p_j}{m} \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \Big), \tag{8}$$

как в классической статистической механике.

3 Калибровочные преобразования

В этом разделе вводится и обсуждается понятие калибровочной инвариантности для уравнения (5).

В соответствии с подходом, изложенным в [13], плотность распределения вероятности $\rho(x, p, t)$ квантовой частицы, состояние которой задается в момент времени t волновой функцией $\varphi(x, p, t)$, пропорциональна $|\varphi|^2 = \varphi(x, p, t)\varphi^*(x, p, t)$. Отсюда следует, что замена волновой функции φ на волновую функцию вида $\exp(ig/\hbar)\varphi$, где $g = g(x, p, t)$ — произвольная действительнозначная функция, не меняет плотность распределения вероятностей $\rho(x, p, t)$. Такое преобразование волновой функции обычно называют ее калибровочным преобразованием.

Посмотрим, как при этом калибровочном преобразовании меняется уравнение (5). Для этого запишем уравнение (5) в некотором более общем виде. Запишем в нем вместо операторов дифференцирования $\partial/\partial p_j$ функции φ оператор $D^p_j = \partial/\partial p_j + iB_j/\hbar$, вместо оператов $\partial/\partial x_j - ip_j/\hbar$ оператор $D^x_j = \partial/\partial x_j + iA_j/\hbar$, а вместо оператора $\partial/\partial t + iH/\hbar$, где $H = mc^2 + p^2/(2m) + V$, оператор $D^x_0 = \partial/\partial t + iA_0/\hbar$, где A_j, A_0, B_j — некоторые функции от x, p и t для $j = 1, ..., n$. В этих обозначениях уравнение (5) перепишется в виде:

$$D^x_0\varphi = \sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{\partial H}{\partial x_j} D^p_j\varphi - \frac{\partial H}{\partial p_j} D^x_j\varphi \Big) + \gamma \sum_{j=1}^{n} D^p_j \left(i\hbar D^x_j\varphi + kTmD^p_j\varphi \right). \tag{9}$$

Калибровочным преобразованием уравнения (9) называется преобразование функции φ и потенциалов A_j, A_0, B_j, где $j = 1, ..., n$ вида:

$$\varphi \quad \longmapsto \quad \varphi' = \exp(-\frac{i}{\hbar}g)\varphi; \tag{10}$$

$$
\begin{aligned}
A_0 &\longmapsto A_0' = A_0 + \frac{\partial g}{\partial t};\\
A_j &\longmapsto A_j' = A_j + \frac{\partial g}{\partial x_j}, \text{ где } j = 1, ..., n;\\
B_j &\longmapsto B_j' = B_j + \frac{\partial g}{\partial p_j}, \text{ где } j = 1, ..., n. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Нетрудно видеть, что после подстановки (10) в уравнение (9), замены (11) и деления обеих частей полученного равенства на $\exp(-(i/\hbar)g)$ вид уравнения (9) не изменится.

Геометрически калибровочное преобразование соответствует переходу к другой тривиализации одномерного комплексного расслоения над фазовым пространством, в котором выбрана некоторая форма линейной связности, определяющая параллельный перенос векторов расслоения вдоль траекторий фазового пространства.

В частном случае для уравнении (5), потенциалы имеют вид:

$$
A_0 = H(x, p) = E + V; \quad A_j = -p_j; \quad B_j = 0 \text{ для } j = 1, ..., n.
$$

Понимание физического смысла потенциалов в общем случае для уравнения (9), требует дополнительного исследования. Для уравнения Дирака потенциалы калибровочной инвариантности обычно связываются с потенциалами электромагнитного поля.

4 Галилева инвариантность

В этом разделе исследуется изменение уравнения (5) при переходе к системе координат, движущейся относительно исходной системы координат равномерно со скоростью u. Диффузионное уравнение (4) не инвариантно относительно преобразований Галилея при переходе к новой инерциальной системе координат, движущейся с постоянной скоростью u относительно старой.

Цель это раздела — исследовать инвариантность уравнения (5) для свободной частицы ($V = 0$) относительно преобразований Галилея с учетом калибровочного преобразования волновой функции.

По определению преобразования Галилея новая система координат выражается через старую по формулам:

$$
t' = t; \quad x' = x - ut; \quad p' = p - mu. \qquad (12)
$$

При этом энергия выражается следующим образом:

$$E' = \frac{p'^2}{2m} = \frac{(p-mu)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} - pu + \frac{mu^2}{2} = E - pu + \frac{mu^2}{2}.$$

Соответственно, старые координаты выражаются через новые по следующим формулам:

$$t = t'; \quad x = x' + ut; \quad p = p' + mu;$$

и
$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{(p'+mu)^2}{2m} = \frac{p'^2}{2m} + p'u + \frac{mu^2}{2} = E' + p'u + \frac{mu^2}{2}. \qquad (13)$$

Подставив эти выражения в уравнение (5), с учетом соотношений (6) и (7) получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial t'} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x'_j}u_j \;\; = \;\; & \sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial V}{\partial x'_j}\frac{\partial\varphi}{\partial p'_j} - \frac{p'_j+mu_j}{m}\Big(\frac{\partial}{\partial x'_j} - i\frac{p'_j+mu_j}{\hbar}\Big)\varphi\Big) - \\ & -\frac{i}{\hbar}\left(E' + p'u + \frac{mu^2}{2} + V\right)\varphi + \\ & +\gamma\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial p'_j}\left(\Big(p'_j + mu_j + i\hbar\frac{\partial}{\partial x'_j}\Big)\varphi + kTm\frac{\partial\varphi}{\partial p'_j}\right).\end{aligned}$$

Отсюда, после простых алгебраических преобразований получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial t'} \;\; = \;\; & \sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial V}{\partial x'_j}\frac{\partial\varphi}{\partial p'_j} - \frac{p'_j}{m}\Big(\frac{\partial}{\partial x'_j} - i\frac{p'_j+mu_j}{\hbar}\Big)\varphi\Big) - \\ & -\frac{i}{\hbar}\left(E' - \frac{mu^2}{2} + V\right)\varphi + \\ & +\gamma\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial p'_j}\left(\Big(p'_j + mu_j + i\hbar\frac{\partial}{\partial x'_j}\Big)\varphi + kTm\frac{\partial\varphi}{\partial p'_j}\right).\end{aligned}$$

Если в полученном уравнении сделать подстановку $\varphi = \exp((i/\hbar)g)\varphi'$, где $g = mux' + mu^2t'/2$, то в результате (калибровочного преобразования) получим уравнение:

$$\frac{\partial\varphi'}{\partial t'} \;\; = \;\; \sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial V}{\partial x'_j}\frac{\partial\varphi'}{\partial p'_j} - \frac{p'_j}{m}\Big(\frac{\partial}{\partial x'_j} - i\frac{p'_j}{\hbar}\Big)\varphi'\Big) -$$

$$-\frac{i}{\hbar}\left(E'+V\right)\varphi'+$$
$$+\gamma\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial p'_j}\left(\Big(p'_j+i\hbar\frac{\partial}{\partial x'_j}\Big)\varphi'+kTm\frac{\partial\varphi'}{\partial p'_j}\right),$$

которое совпадает с уравнением (5). Таким образом, мы доказали галилееву инвариантность уравнения (5).

5 Программа дальнейших исследований

В этом разделе перечисляются направления дальнейших исследований и даются наброски подходов к поставленным задачам.

5.1. Сравнение модели рассеяния волн с квантовой моделью

Чтобы сравнить точность модели, описываемой уравнением (5), со стандартной квантово-механической моделью, нужно найти ситуацию, в которой эти модели дают существенно различные результаты. Такая ситуация может, например, возникнуть, если рассматривать процесс с быстро меняющейся потенциальной функцией $V(x,t)$ по времени. Такой потенциал может препятствовать переходу волновой функции уравнения (5) за время переходного процесса к "стационарной". В результате решение уравнения (5) может отличаться от решения уравнения Шредингера.

Чтобы это проверить, рассмотрим, например, потенциальную функцию $V=V_0(x)+V_1(x)\cos(\omega t)$ при $\omega\longrightarrow\infty$.

Механические и квантово-механические системы с таким потенциалом были исследованы во многих работах, например [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25]. Физическая задача, в которой возникает такая квантовая модель, — это заряженная частица во внешнем силовом поле и лазерном луче.

Уравнение (5) с этим потенциалом имеет вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=A\varphi+\gamma B\varphi, \qquad (14)$$

где

$$A\varphi=\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial(V_0+V_1\cos(\omega t))}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial p_j}-\frac{p_j}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\Big)-$$

$$-\frac{i}{\hbar}\Big(mc^2 + V_0 + V_1\cos(\omega t) - \sum_{j=1}^{n}\frac{p_j^2}{2m}\Big)\varphi, \qquad (15)$$

и $$B\varphi = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\Big(p_j + i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)\varphi + kTm\frac{\partial\varphi}{\partial p_j}\right). \qquad (16)$$

Нужно исследовать решения этого уравнение при больших ω и сравнить эти решения с решениями квантовой системы.

5.2. Исследование процесса рассеяния смешанных волн и расчет времени переходного процесса к стационарному смешанному состоянию теплового равновесия

Другая задача, которую хотелось бы исследовать, — это поведение процесса для смешанных волн вида $\varphi(x,p,t,\xi)$, где $\xi \in D$ — дополнительный параметр, и распределение $\rho(x,p,t)$ в фазовом пространстве в момент времени t для частицы, состояние которой описывается волновой функцией $\varphi(x,p,t,\xi)$, пропорционально функции $\int_D |\varphi(x,p,t,\xi)|^2 d\xi$, то есть

$$\rho(x,p,t) = \frac{\int_D \varphi(x,p,t,\xi)\varphi^*(x,p,t,\xi)d\xi}{\int_{R^{2n}}\int_D \varphi(x,p,t,\xi)\varphi^*(x,p,t,\xi)d\xi dxdp}.$$

При этом предполагается, что изменение волновой функции во времени происходит в соответствии с уравнением (5) при каждом фиксированном $\xi \in D$.

Другой эквивалентный способ описания этого процесса, принятый в квантовой механике, — это рассматривать самосопряженные операторы $\hat\rho$ от функций на фазовом пространстве R^{2n} с ядром оператора вида $\hat\rho(x,p;x',p',t) = \int_D \varphi(x,p,t,\xi)\varphi^*(x',p',t,\xi)d\xi$. Заметим, что любой положительный самосопряженный оператор $\hat\rho$ на пространстве функций приводится к диагональному виду и, следовательно, к такому виду. Положительные самосопряженные операторы со следом единица называются операторами плотности состояний. Тогда плотность распределения вероятностей $\rho(x,p,t) = \hat\rho(x,p;x,p,t)/Tr\hat\rho$, где $Tr\hat\rho = \int_{R^{2n}}\hat\rho(x,p;x,p,t)dxdp$ — след оператора $\hat\rho$. Изменение оператора плотности состояния $\hat\rho$ во времени задается уравнением:

$$\frac{\partial\hat\rho}{\partial t} = \mathcal{D}\hat\rho + \hat\rho\mathcal{D}^* - \hat\rho Tr(\mathcal{D}\hat\rho + \hat\rho\mathcal{D}^*),$$

где $\mathcal{D}$ — оператор, выраженный правой частью уравнения (5), а $\mathcal{D}^*$ — сопряженный к нему оператор. Выражение со следом Tr стоит в этом уравнении для того, чтобы след у орератора плотности состояния $\hat{\rho}$ в каждый момент времени равнялся единице.

Это нелинейное уравнение. Нужно исследовать имеет ли оно единственное стационарное состояние, определить вид этого стационарного состояния (состояния теплового равновесия) и оценить время переходного процесса к этому стационарному состоянию.

5.3.Обобщение модели с учетом спина частицы и требованием релятивистской инвариантности

Пусть $M = R^4$ — пространство-время Минковского, $P = R^3$ — пространство импульсов и $B = M \times P$ — фазовое пространство-время, на котором естественным образом действует группа Лоренца (если фиксировать массу покоя частицы m). На этом же пространстве действуют коммутативная группа сдвигов по координатам, сохраняющих собственное время в каждой точке фазового пространства, и однопараметрическая группа сдвигов собственного времени в каждой точке фазового пространства. Вместе эти группы определяют действие группы Пуанкаре P на пространстве B.

В этой новой модели предлагается рассматривать значения волновой функции φ не в поле комплексных чисел C, а в некотором евклидовом векторном пространстве F над полем комплексных чисел, на котором действует унитарными линейными операторами группа $SU(2, \mathrm{C})$ — двукратная накрывающая группы вращений $SO(3)$ трехмерного пространства, действующая на фазовом пространстве R^6. Распределение вероятностей $\rho(x, p, t)$ нахождения частицы в фазовом пространстве в момент времени t по прежнему считается пропорциональным $|\varphi(x, p, t)|^2$.

Группа $SU(2, \mathrm{C})$ является подгруппой в группе $SL(2, \mathrm{C})$, где $SL(2, \mathrm{C})$ — группа двумерных комплексных матриц с определителем, равным 1. Группа $SL(2, \mathrm{C})$ является двукратной накрывающей группой для группы Лоренца L. Таким образом, имеем коммутативную диаграмму гомоморфизмов групп:

$$\begin{array}{ccccc} SU(2,\mathrm{C}) & \subset & SL(2,\mathrm{C}) & \subset & \hat{P} \\ \downarrow j & & \downarrow j & & \downarrow j \\ SO(3) & \subset & L & \subset & P, \end{array}$$

где $\hat{P}$ — двукратная накрывающая группа для группы Пуанкаре.

Далее рассматривается расслоение $pr : F \times B \to B$ со слоем F над фазовым пространством-временем B. На базе B действует группа Пуанкаре P. Действие ее подгруппы $SO(3) \subset L$ на B вращениями относительно начала координат поднимается до согласованного действия группы $SU(2, C)$ в слое F над точкой начала координат в B. Тогда это действие может быть однозначно продолжено до действия группы $\hat{P}$ на расслоении $F \times B$, согласованное с действием группы P на базе B. Согласованность действий групп на расслоении означает, что для любого $g \in \hat{P}$ коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} F \times B & \xrightarrow{g} & F \times B \\ \downarrow pr & & \downarrow pr \\ B & \xrightarrow{j(g)} & B. \end{array}$$

При этом, если $g \in SU(2, C) \subset \hat{P}$, то коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} F \times \bar{0} & \subset & F \times B \\ \downarrow g & & \downarrow g \\ F \times \bar{0} & \subset & F \times B. \end{array}$$

Единственность поднятия действия группы Пуанкаре с B до действия группы $\hat{P}$ на расслоении $F \times B$ понимается с точностью до выбора тривиализации этого расслоения.

Если $a, b \in B$ две точки базы (фазового пространства-времени), то однозначно определяется элемент группы Пуанкаре $h_{a,b} \in P$ параллельного переноса системы координат из точки a в точку b. Действие элемента $h_{a,b}$ однозначно поднимается до действия элемента $\hat{h}_{a,b} \in \hat{P}$ на расслоении $F \times B$. Это действие переносит элементы слоя F над a в элементы слоя над b. Будем называть это действие параллельным переносом элементов слоя по вектору $\vec{ab}$. Далее это определение позволят нам определить параллельный перенос в расслоении $F \times B$ вдоль любой кривой в базе.

В рассматриваемой модели волновая функция φ в момент времени t задается функцией на фазовом пространстве вида $\varphi : R^6 \to F$. Изменение волновой функции во времени определяется тем, что она одновременно находится в нескольких движениях:

1) Вектор $\varphi(x, p) \in F$ параллельно переносится вдоль траектории в фазовом пространстве; траектория определяется случайным броуновским процессом в соответствии с некоторым диффузионным уравнением, например уравнением Крамерса.

2) Вектор φ в каждой точке (x, p) в системе координат, связанной с этой точкой вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = mc^2/\hbar$ в слое F над этой точкой в собственном времени, связанном с этой точкой; направление оси вращения $J_{x,p} \in su(2, C)$ в неподвижной (лабораторной) системе координат преобразуется от точки к точке так же, как направление момента импульса.

Значение волновой функции в точке (x, p) в момент времени $(t + \triangle t)$ определяется средним значением векторов φ по всем траекториям, заканчивающимся в точке (x, p) фазового пространства в момент времени $(t + \triangle t)$.

Нужно построить соответствующее этой модели дифференциальное уравнение и исследовать его.

5.4. Рассеяние волн на фазовом пространстве и взаимодействие с электромагнитным полем

Этот вопрос связан с введением в модель взаимодействия с электромагнитным полем. Такое введение можно было бы сделать по аналогии с его введением в уравнение Дирака. Как было показано в уравнении (9) на этом пути возникают потенциалы, зависящие и от импульса, в отличии от векторного потенциала электромагнитного поля, которые зависят только от координат и времени. Определение смысла векторных потенциалов, зависящих от импульсов, также требует дополнительного исследования.

Список литературы

[1] Neumann J. Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin: Springer - Verlag, 1932 (Имеется русский перевод:Нейман Д. Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.)

[2] Bohm D., Vigier J.P. //Phys. Rev. 1954. V.96. P.208; 1958. V.109. P.882.

[3] Nelson E. // Phys. Rev. 1966. V.150. N4. P.1079 -1085.

[4] Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики, М.: Наука, 1976.

[5] Maslov V. P. *Kolmogorov–Feller equations and the probabilistic model of quantum mechanics.* // Itogi nauki i tehniki. Probability, Mathematical Statistics and Cybernetics, 1982, vol. 19, p. 55–85 (in Russian).

[6] Поппер К. Квантовая теория и раскол в физике. Москва:"Логос", 1998.

[7] Bell J.S. *Introduction to the Hidden-Variable Question,* in "Foundation of Quantum Mechanics", B. d'Espagnat ed., Academic, N.Y. (1972).

[8] Хренников А. Ю. *Эксперимент ЭПР-Бома и неравенство Белла: квантовая физика и теория вероятностей* // Теоретическая и математическая физика. - 2008. - Т. 157, N 1. - С. 99-115.

[9] Cabello A. *Bibliographic guide to the foundations of quantum mechanics and quantum information* //http://arxiv.org/abs/quant-ph/0012089v12 (2004).

[10] Beniaminov E.M. *A Method for Justification of the View of Observables in Quantum Mechanics and Probability Distributions in Phase Space*// http://arxiv.org/abs/quant-ph/0106112 (2001).

[11] Beniaminov E. M. *Diffusion processes in phase spaces and quantum mechanics* //Doklady Mathematics (Proceedings of the Russian Academy of Sciences), 2007, vol.76, No. 2, 771–774. (Бениаминов Е.М. *Диффузионные процессы в фазовых пространствах и квантовая механика* //Доклады РАН, 2007, том 416, №1, с.31-35)

[12] Beniaminov E. M. *Quantization as asymptotics of a diffusion process in phase space*// Proc. Intern. Geom. Center, 2009, 2(4), 7-50. (in Russian; English translation: http://arXiv.org/abs/0812.5116v1).

[13] Beniaminov E. M. *Quantum Mechanics as Asymptotics of Solutions of Generalized Kramers Equation* //Electronic Journal of Theoretical Physics (EJTP) 8, No. 25 (2011) 195-210.

[14] Wigner E. *On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium* // Phys. Rev. 1932. V. 40. P. 749-759.

[15] Husimi K. *Some Formal Properties of the Density Matrix*// Proc. Phys. Math. Soc. Jpn. .22. (1940) P. 264-314 .

[16] Feynman R., Hibbs A. Quantum mechanics and path integrals, New York: McGraw-Hill, 1965.

[17] Kramers H.A. // Physica. 1940. Vol. 7. P. 284-304.

[18] Van Kampen N.G. Stochastic Processes in Physics and Chemistry. North Holland, Amsterdam, 1981.

[19] Kapitza P. L. , Eksp Zh. Teor. Fiz. 21, 588 (1951); Collected Papers of P L Kapitza edited by D. Ter Haar (Pergamon Press, Oxford, 1965).

[20] Landau L. D., Lifshitz E. M. Mechanics. Pergamon, Oxford, 1960, pp. 93 - 95.

[21] Cook R. J., Shankland D. G., Wells A. L. Phys. Rev. A31, 564 (1985).

[22] Grozdanov T. P., Raković M. J. Phys. Rev. A38, 1739 (1988).

[23] Gillary I., Moiseyev N. Phys. Rev. A66, 063415 (2002).

[24] Rahav S., Gillary I., Fishman S. Phys. Rev. Lett. 91, 110404 (2003); Phys. Rev. A68, 013820 (2003).

[25] Bandyopadhyay M., S. Dattagupta *Quantum mechanics of rapidly and periodically driven systems.* Pramana – J. Phys., Vol. 70, No. 3, March 2008, 381–398.