УДК 004.65 – 047.44

Е. М. Бениаминов

Метрическое пространство состояний базы данных

Вводится понятие однородных ограничений целостности базы данных. Для схем баз данных с однородными ограничениями целостности определяется метрика в пространстве ее состояний. Показывается, что условию однородности ограничений целостности удовлетворяют многие распространенные ограничения целостности, используемые на практике. К ним относятся ключи, ссылочные зависимости, зависимости по соединению, ограничения многие ко многим и т.д. Введенные конструкции, позволяют строить метрические пространства состояний схем баз данных и открывают возможности исследования ограничений целостности баз данных с использованием методов и понятий «непрерывной математики».

Ключевые слова: *реляционная база данных, операция над отношениями, метрическое пространство*

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Понятия «схема базы данных» и «состояние базы данных» прочно вошли в нашу жизнь. Однако даже для специалистов до сих пор остается проблемой исследование множества всех возможных допустимых состояний схемы базы данных и вопроса о том, как то или иное ограничение в базах данных может отразиться на множестве их допустимых состояний. В настоящей статье предлагается некоторый подход к исследованию этой проблемы, основанный на наблюдении, что стандартные ограничения целостности в базах данных удовлетворяют некоторым условиям однородности, что позволяет определить для схем базы данных с однородными ограничениями целостности полные метрические пространства обобщенных состояний. При этом если у вас есть интерпретация одной схемы базы данных в другую схему базы данных, то эта интерпретация индуцирует непрерывное отображение полных метрических пространств обобщенных состояний, соответствующих этим схемам баз данных. Отсюда следует, что многие вопросы относительно схем баз данных и интерпретаций одной схемы базы данных в другую могут быть сведены к изучению топологий полных метрических пространств обобщенных состояний схем баз данных, а также к исследованию непрерывных отображений между этими пространствами.

В этом разделе мы попытались дать определение однородного ограничения целостности схемы реляционной базы данных, показать, что все стандартные ограничения в базах данных являются однородными, и построить полные метрические пространства обобщенных состояний для схем баз данных с однородными ограничениями целостности.

Приведем сначала для полноты изложения стандартные определения, принятые в теории реляционных баз данных [1, 2].

Определение 1. *Схемой отношения* $R(a_1,...,a_n)$ *называется имя отношения R и множество имен атрибутов* $\{a_1,...,a_n\}$. *Для каждого имени атрибута* a_j *задано множество возможных значений этого атрибута* D_{a_j}, *которое называется доменом атрибута* a_j. *Домены для атрибутов с различными именами могут совпадать.*

Определение 2. *Схемой Sch базы данных называется набор схем отношений* $R_1(a_{1,1},...,a_{1,q_1}),...,$ $R_n(a_{n,1},...,a_{n,q_n})$ *вместе с набором условий, которым должны удовлетворять отношения, соответствующие этим схемам отношений. Этот набор условий называется ограничениями целостности базы данных.*

Примерами ограничений целостности являются выделение ключей в схемах отношений, выделение функциональных зависимостей между наборами атрибутов, ссылочные зависимости между атрибутами разных схем отношений, зависимости по соединению, ограничения по мощности между значениями атрибутов в отношении вида *n* к *k* и т. д. В общем алгебраическом подходе все эти ограничения целостности выражаются в виде системы уравнений:

$$f_1(R_1,...,R_n)=g_1(R_1,...,R_n)$$
$$...$$
$$f_k(R_1,...,R_n)=g_k(R_1,...,R_n)$$

где f_i и g_i для i=1,...,k, – это правильно построенные выражения (запросы) из имен схем отношений и имен операций реляционной алгебры.

В разных подходах к базам данных выделяются различные классы допустимых ограничений в схемах баз данных. В настоящей работе также будет использоваться некоторый подкласс допустимых ограничений целостности баз данных, который будет описан дальше.

Определение 3. *Состоянием базы данных со схемой*

$$Sch=\langle R_1,...R_n; Ограничения\_целостности\rangle$$

называется соответствие s схемам отношений

$$R_i(a_{i,1},...a_{i,q_i})$$

конечных отношений $r_i \subset D_{a_{i,1}}\times...\times D_{a_{i,q_i}}$

для i=1,...,n. Набор отношений $s=\langle r_1,...,r_n\rangle$ *называется допустимым состоянием схемы Sch, если он удовлетворяет ограничениям целостности схемы базы данных.*

Обозначение. Обозначим через $D=\coprod_{t\in T}D_t$ разъединенное объединение доменов всех типов атрибутов (два атрибута считаются атрибутами одного типа, если у них совпадают домены). Через $S(Sch; D)$ обозначим множество всех допустимых состояний схемы базы данных Sch.

Определения, которые были приведены до сих пор, стандартны для теории баз данных. Перейдем к новым конструкциям.

Пусть $M=\{1,...,m\}$ – некоторое конечное множество и Sch – некоторая схема базы данных с доменом D. Рассмотрим эту же схему базы данных с доменом $M\times D$ – декартовым произведением множества M и прежнего домена D.

Обозначение. Если $r\subset D_{a_1}\times...\times D_{a_q}$ – отношение с доменом D, то через $M\cdot r$ обозначается отношение с доменом $M\times D$ вида:

$$M\cdot r=\{\langle(m,d_1),...,(m,d_n)\rangle \mid m\in M;\langle d_1,...,d_n\rangle\in r\}.$$

Для каждой строки $\langle d_1,...,d_n\rangle$ отношения r имеется ровно $|M|$ различных строк отношения $M\cdot r$ вида $\langle(m,d_1),...,(m,d_n)\rangle$, где $m\in M$. Если $s=\langle r_1,...,r_n\rangle$ состояние схемы базы данных, то через отношение $M\cdot s$ обозначается состояние базы данных $M\cdot s\overset{def}{=}\langle M\cdot r_1,...,M\cdot r_n\rangle$.

Определение 4. *Ограничение целостности схемы базы данных Sch называется однородным, если из допустимости состояния* $s=\langle r_1,...,r_n\rangle$ *схемы Sch следует допустимость состояния* $M\cdot s=\langle M\cdot r_1,...,M\cdot r_n\rangle$ *этой схемы для любого конечного множества M.*

В дальнейшем будут рассматриваться только однородные ограничения целостности.

Определение 5. *Операция* $F(R_1,...,R_q)$ *над отношениями называется однородной, если для любого набора отношений* $r_1,...,r_n$*, допустимого для операции F, и любого конечного множества M выполняется соотношение:* $F(M\cdot r_1,...,M\cdot r_q)=M\cdot F(r_1,...,r_q)$.

Следующее утверждение легко проверяется.

Утверждение 1. *Теоретико-множественные операции над отношениями* $R_1\cup R_2$ *– объединения,* $R_1\cap R_2$ *– пересечения,* $R_1\setminus R_2$ *– разности являются однородными. Операции проекции отношения на подмножество атрибутов, соединения отношений по непустому пересечению множеств атрибутов отношений, переименования атрибутов также однородны. Операция декартового произведения отношений* $R_1\times R_2$ *– неоднородна. Если* $\varphi: A\to B$ *– согласование наборов атрибутов,* $R_1(A)$ *и* $R_2(B)$ *– отношения с соответствующими наборами атрибутов, то операция* $\varphi_*(R_1)\cap R_2$ *– однородна, где* $\varphi_*(R_1)$ *– прямой образ отношения* R_1 *относительно* φ. (Определения соответствующих операций см. в [2].)

Утверждение 2. *Если ограничение целостности вида*

$$f(R_1,...,R_n)=g(R_1,...,R_n)$$

представляется правильно построенными выражениями f и g из имен отношений $R_1,...,R_n$ *и имен однородных операций, то это ограничение само однородно.*

Доказательство. Если $s=\langle r_1,...,r_n\rangle$ – допустимое состояние для ограничения $f(R_1,...,R_n)=g(R_1,...,R_n)$, то, по определению допустимости, равенство $f(r_1,...,r_n)=g(r_1,...,r_n)$ верно. Так как выражения f и g строятся из однородных операций, то для любого конечного множества M выполняются равенства

$$f(M\cdot r_1,...,M\cdot r_n)=M\cdot f(r_1,...r_n)=$$
$$=M\cdot g(r_1,...r_n)=g(M\cdot r_1,...,M\cdot r_n).$$

Отсюда получаем равенство $f(M\cdot r_1,...,M\cdot r_n)=g(M\cdot r_1,...,M\cdot r_n)$, которое соответствует требованию однородности этого соотношения.

Легко проверить, что однородными являются ограничения в виде функциональных зависимостей, ссылочных зависимостей, зависимостей по соединению отношений и т.д., так как они выражаются в виде равенств термов, использующих только однородные операции над отношениями.

С другой стороны, такое ограничение как требование, что отношение $R(x,y)$ является всюду определенным отношением по атрибуту x, неоднородно. Неоднородным ограничением является также равенство $R_3=R_1\times R_2$, где знак $\times$ означает декартово произведение отношений.

Итак, пусть Sch – схема базы данных с однородными ограничениями целостности и $M=\{1,...,m\}$ – некоторое множество. Введем отношение эквивалентности на объединении

$$S_\infty(Sch; M, D) \overset{def}{=} \coprod_{n\in Z^+} S(Sch; M^n \times D)$$

множеств $S(Sch; M^n \times D)$ состояний схемы базы данных с доменами $M^n \times D$ для всех неотрицательных целых чисел $n \in Z^+ = \{0,1,2,...\}$.

Определение 6. *Через ~ обозначим наименьшее отношение эквивалентности на множестве* $S_\infty(Sch; M, D) \overset{def}{=} \coprod_{n\in Z^+} S(Sch; M^n \times D)$, *содержащее пары* $s \sim M \cdot s$, *где состояние базы данных* $s \in S_\infty(Sch; M, D)$. *Фактор множество множества* $S_\infty(Sch; M, D)$ *по построенному отношению эквивалентности ~ называется множеством обобщенных состояний схемы базы данных Sch и обозначается через*

$$\widetilde{S}(Sch; M, D) \overset{def}{=} S_\infty(Sch; M, D)/\sim.$$

Определение 7. *Если* $\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2 \in \widetilde{S}(Sch; M, D)$ *– обобщенные состояния схемы базы данных, и* $s_1^N, s_2^N \in S(Sch; M^N \times D)$ *– их представители для достаточно большого N. Тогда расстояние* $\rho(\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2)$ *между этими обобщенными состояниями по определению полагается равным*

$$\rho(\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2) \overset{def}{=} \frac{|s_1^N \Delta s_2^N|}{|M|^N},$$

где $s_1^N \Delta s_2^N \overset{def}{=} (s_1^N \setminus s_2^N) \cup (s_2^N \setminus s_1^N)$ *– симметрическая разность множеств* s_1^N *и* s_2^N, *а через |X| обозначается число элементов в множестве X.*

Легко видеть, что функция $\rho(\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2)$ не зависит от числа *N* и удовлетворяет свойствам метрики (положительности для несовпадающих элементов, симметрии и неравенству треугольника) метрического пространства.

Построенное метрическое пространство

$$\widetilde{S}(Sch; M, D)$$

не является полным, т. е. не всякая бесконечная последовательность Коши $\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2, ... \in \widetilde{S}(Sch; M, D)$ обобщенных состояний базы данных сходится в этом пространстве. Это следует, например из того, что все расстояния в пространстве $\widetilde{S}(Sch; M, D)$ – рациональные числа. Напомним (см., например, [3]), что последовательность элементов $\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2, ... \in \widetilde{S}(Sch; M, D)$ называется последовательностью Коши, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое большое натуральное число *N*, что для всех $i_1, i_2 > N$ расстояние между членами последовательности $\rho(\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2) < \varepsilon$.

Определение 8. *Полным пространством обобщенных состояний* $\hat{S}(Sch; M, D)$ *схемы базы данных Sch называется стандартное пополнение пространства* $\widetilde{S}(Sch; M, D)$ *по метрике ρ. Элементами пространства* $\hat{S}(Sch; M, D)$ *являются классы эквивалентных последовательностей Коши метрического пространства* $\widetilde{S}(Sch; M, D)$. *Напомним, что две последовательности Коши* $\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2, ...$ *и* $\widetilde{s}_1', \widetilde{s}_2', ...$ *называются эквивалентными, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое большое натуральное число N, что для всех* $i_1, i_2 > N$, *расстояние между членами последовательностей* $\rho(\widetilde{s}_{i_1}, \widetilde{s}_{i_2}') < \varepsilon$.

Заметим, что, если схема базы данных *FreeSch* содержит те же схемы отношений, что и схема *Sch*, но не содержит никаких соотношений, то каждое допустимое состояние схемы базы данных *Sch* является допустимым состоянием схемы *FreeSch*. Это индуцирует вложение множеств состояний $S(Sch; M^n \times D) \subset S(FreeSch; M^n \times D)$ и, соответственно, вложение множеств обобщенных состояний $\widetilde{S}(Sch; M, D) \subset \widetilde{S}(FreeSch; M, D)$ с сохранением расстояний между состояниями и, следовательно, индуцирует вложение пополненных метрических пространств обобщенных состояний $\hat{S}(Sch; M, D) \subset \hat{S}(FreeSch; M, D)$, для которого верно следующее утверждение.

Утверждение 3. *Подмножество обобщенных состояний* $\hat{S}(Sch; M, D)$ *схемы базы данных Sch является замкнутым подмножеством в полном метрическом пространстве* $\hat{S}(FreeSch; M, D)$.

Задачей направления, определенного настоящей статьей, является изучение того, как топология пространства $\hat{S}(Sch; M, D)$ связана с ограничениями целостности схемы базы данных *Sch*, и какие замкнутые подпространства в $\hat{S}(FreeSch; M, D)$ выделяются ограничениями целостности. Здесь напрашивается аналогия с задачей алгебраической геометрии, но, в отличие от алгебраической геометрии, вместо алгебраических уравнений рассматриваются логические ограничения целостности схем баз данных, и пространства, соответствующие схемам баз данных, имеют хорошую топологию, заданную метрикой на пространстве обобщенных состояний схемы базы данных.

2. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ СХЕМ БАЗ ДАННЫХ

2.1. Случай схем баз данных, состоящих из унарных отношений

Рассмотрим простейшие примеры, которые позволят нам представить пространства $\hat{S}(Sch; M, D)$ и построить геометрические образы построенных конструкций.

В простейшем случае будем предполагать, что домен *D* состоит из одного элемента *D*={*d*}, а множество M, с помощью которого мы будем расширять домен, состоит из двух элементов $M=\{0;1\}$.

Будем предполагать также, что схема базы данных состоит из одного унарного отношения $Sch=\{R(a)\}$, а ограничений целостности нет.

В этом случае множество состояний схемы базы данных состоит из двух элементов $S(Sch;D)=\{\Lambda,\{d\}\}$. В первом состоянии схеме отношения $R(a)$ соответствует пустое множество Λ, во втором — одноэлементное множество {d}.

В свою очередь, множество состояний $S(Sch;M\times D)$ состоит из четырех элементов, как множество всех подмножеств декартового произведения $M\times D=\{(0,d);(1,d)\}$. Для геометрического представления $S(Sch;M\times D)$ поставим в соответствие элементам $(0,d)$ и $(1,d)$ полуинтервалы (0;1/2] и (1/2;1] – подмножества полуинтервала (0;1]. Тогда множество состояний $S(Sch;M\times D)$ представляется (изоморфно булевой алгебре подмножеств) в виде алгебры подмножеств полуинтервала (0;1], порожденной полуинтервалами (0;1/2] и (1/2;1].

Соответственно, множество состояний

$$S(Sch;M^2\times D)$$

имеет число элементов 2^4, как число подмножеств множества

$$M^2\times D=\{(0,0,d);(0,1,d);(1,0,d);(1,1,d)\},$$

состоящего из четырех элементов. Для геометрического представления $S(Sch;M^2\times D)$, по аналогии с предыдущим, устанавливается биекция этого множества с подмножествами в (0;1], состоящих из полуинтервалов с концами в точках 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1. Так, атомарным элементам булевой алгебры $S(Sch;M^2\times D)$ ставятся в соответствие следующие полуинтервалы:

$\{(0,0,d)\}\mapsto(0;1/4]$; $\{(1,0,d)\}\mapsto(1/4;1/2]$;
$\{(0,1,d)\}\mapsto(1/2;3/4]$; $\{(1,1,d)\}\mapsto(3/4;1]$.

Элемент $S(Sch;M^2\times D)$ в нашем случае – это произвольное подмножество в множестве $M^2\times D$. Оно является объединением атомов, и ему в геометрическом представлении соответствует объединение соответствующих полуинтервалов.

В общем случае, элементы множества $S(Sch;M^n\times D)$, когда $D=\{d\}$ и $M=\{0;1\}$, геометрически представляются также некоторыми подмножествами в полуинтервале (0;1]. То есть строится изоморфизм между булевой алгеброй всех подмножеств множества $M^n\times D$ и булевой алгеброй некоторых подмножеств в полуинтервале (0;1], которые являются объединениями полуинтервалов с концами полуинтервалов в точках вида $k/2^n$, где $0\le k\le 2^n$. При этом атомарным элементам булевой алгебры $S(Sch,M^n\times D)$ вида $\{(\varepsilon_n,...,\varepsilon_1,d)\}$, где $\varepsilon_i\in M=\{0;1\}$ для $i=1,...,n$, ставятся в соответствие полуинтервалы вида $(t_\varepsilon,t_\varepsilon+1/2^n]$, длины $1/2^n$, где $t_\varepsilon=\varepsilon_1/2+\varepsilon_2/2^2+...+\varepsilon_n/2^n$. Остальные элементы $S(Sch;M^n\times D)$ являются объединениями атомарных, и им ставятся в соответствие подмножества в (0;1], которые являются объединениями соответствующих полуинтервалов.

Обозначение. Булеву алгебру подмножеств в полуинтервале (0;1], которые могут быть представлены объединениями полуинтервалов с концами в точках вида $k/2^n$, где $k=0,1,...,2^n$, обозначим через $P((0;1];1/2^n)$ ($1/2^n$ – длина наименьшего подинтервала), а описанный выше изоморфизм булевых алгебр $S(Sch;M^n\square D)$ и $P((0;1];1/2^n)$ обозначим через j_n.

Заметим, что отображению умножения $M\cdot:S(Sch;M^n\times D)\to S(Sch;M^{n+1}\times D)$ состояний базы данных на множество M, которое для однородных ограничений введено в Определении 4, соответствует обычное вложение множества $P((0;1];1/2^n)$ как подмножества в $P((0;1];1/2^{n+1})$. Более точно, верно следующее утверждение.

Утверждение 4. *Следующая диаграмма отображений*

$$\begin{array}{ccc} S(Sch;M^n\times D) & \xrightarrow{M\cdot} & S(Sch;M^{n+1}\times D) \\ \downarrow j_n & & \downarrow j_{n+1} \\ P((0;1];1/2^n) & \subset & P((0;1];1/2^{n+1}) \end{array}$$

коммутативна.

Так как все отображения в диаграмме утверждения 4 являются гомоморфизмами булевых алгебр, то коммутативность диаграммы достаточно проверить на атомарных элементах булевой алгебры $S(Sch;M^n\times D)$. Легко видеть, что по определению отображения j_n атомарному элементу в $S(Sch;M^n\times D)$ соответствует полуинтервал длины $1/2^n$, а при отображении умножения на двухэлементное множество M, атом (состояние из одной строки) переходит в состояние – объединение двух атомов (из двух строк) в $S(Sch,M^{n+1}\times D)$ и, соответственно, при отображении j_{n+1} переходит в тот же полуинтервал – объединение двух соседних полуинтервалов длины $1/2^{n+1}$ в $P((0;1];1/2^{n+1})$.

Следствием утверждения 4 и определения 6 получим в пределе при n, стремящемся к бесконечности, биекцию

$$\tilde{j}:\tilde{S}(Sch;M,D)\to\bigcup_{n\in N}P((0;1];1/2^n)$$

и следующее утверждение.

Утверждение 5. *Множество обобщенных состояний $\tilde{S}(Sch;M,D)$ схемы базы данных с одним унарным отношением и доменом из одного элемента находится в биекции $\tilde{j}$ с множеством $\bigcup_{n\in N}P((0;1];1/2^n)$ – множеством подмножеств в* *полуинтервале (0;1], представимых в виде конечного объединения полуинтервалов с концами в точках* $k/2^n$*, где* $0 \le k \le 2^n$*, и* $n \in Z^+$.

Теперь вспомним Определение 7 о расстоянии между обобщенными состояниями. Легко проверить, что биекция $\widetilde{j}$ сохраняет расстояния, если в множестве $\bigcup_{n \in N} P((0;1];1/2^n)$ ввести расстояние между элементами $X, Y \in \bigcup_{n \in N} P((0;1];1/2^n)$, равным длине симметрической разности множеств *X* и *Y*, где *X* и *Y* – подмножества в полуинтервале ((0;1], состоящие из объединений конечного числа полуинтервалов с концами в точках $k/2^n$, где $0 \le k \le 2^n$, и $n \in Z^+$. Отсюда следует, что и пополнения по метрике соответствующих пространств изометричны.

Пополнение пространства $\widetilde{S}(Sch;M,D)$ по метрике дает, в соответствии с Определением 8, полное пространство обобщенных состояний $\hat{S}(Sch;M,D)$ схемы базы данных *Sch*.

С другой стороны пополнением пространства $\bigcup_{n \in N} P((0;1];1/2^n)$ по введенной метрике дает пространство *I(*(0;1]) измеримых подмножеств на полуинтервале (0;1], заданных с точностью до подмножеств меры 0, с расстоянием между подмножествами, равным мере симметрической разности подмножеств.

Эту конструкцию легко обобщить на случай, когда в домене *D* не один элемент. Тогда каждому элементу из домена *D* соответствует свой полуинтервал длины 1 и, следовательно, всему домену *D* будет соответствовать полуинтервал (0;|*D*|], где |*D*| – число элементов в множестве *D*.

Таким образом, верна следующая теорема.

<u>Теорема 1.</u> *Если схема базы данных Sch состоит из одного унарного отношения, и ограничений целостности нет, то полное пространство обобщенных состояний* $\hat{S}(Sch;M,D)$ *схемы базы данных Sch изометрично пространству I((0;|D|]) измеримых подмножеств на полуинтервале (0;|D|], заданных с точностью до подмножеств меры 0, и с расстоянием между подмножествами, равным мере симметрической разности подмножеств.*

Если схема базы данных *Sch* состоит не из одного унарного отношения, а из *n*, т. е. *Sch*=$\langle R_1(a_1),...,R_n(a_n)\rangle$, то состояние такой схемы состоит из набора состояний отношений. Поэтому верна следующая теорема.

<u>Теорема 2.</u> *Если схема базы данных* $Sch = \langle R_1(a_1),...,R_n(a_n)\rangle$ *состоит из n унарных отношений, и ограничений целостности нет, то полное пространство обобщенных состояний* $\hat{S}(Sch;M,D)$ *схемы базы данных Sch изометрично пространству* $I((0;|D_1|]) \times ... \times I((0;|D_n]|)$ *– декартовому произведению метрических пространств* $I((0;|D_i|])$*, где* $I((0;|D_i|])$ *то же, что и в Теореме 1, пространство измеримых подмножеств на полуинтервале* $(0;|D_i|]$*, заданных с точностью до подмножеств меры 0, и* $|D_i|$ *– число элементов в домене атрибута* a_i*,* $i = 1,...,n$*. Метрика в декартовом произведении метрических пространств равна сумме метрик множителей:* $\rho(\langle X_1,...,X_n\rangle;\langle Y_1,...,Y_n\rangle) = \rho(X_1,Y_1)+...+\rho(X_n,Y_n)$ *для любых* $X_i, Y_i \in I((0;|D_i|])$*,* $i = 1,...,n$*. Такое метрическое пространство в свою очередь изометрично пространству* $I((0;|D|])$*, где* $D = \coprod_{i=1}^{n} D_i$ *– разъединенное объединение доменов атрибутов.*

2.2 Случай схем баз данных, состоящих из *n*-арных отношений

Рассмотрим с пример, когда схема базы данных *Sch* состоит из одного бинарного отношения $R(a_1, a_2)$, а домен *D*={*d*} состоит из одного элемента. В этом случае, множество состояний *S*(*Sch*; *D*) схемы базы данных состоит из двух элементов Λ и $\{\langle d;d\rangle\}$ – пустого и из одной строки. Как и ранее, будем предполагать, что множество *M*={0;1} состоит из двух элементов. Тогда $S(Sch;M \times D)$ – множество всех бинарных отношений с доменом $M \times D = \{(0;d),(1;d)\}$, т.е. это множество всех подмножеств в декартовом произведении $(M \times D)\times(M \times D)$. Так как множество $M \times D$ состоит из двух элементов, а множество $(M \times D)\times(M \times D)$ – из четырех элементов, то множество всех подмножеств в $(M \times D)\times(M \times D)$ состоит из 2^4 элементов.

Рассмотрим определение отображения умножения $M\cdot : S(Sch;D) \to S(Sch;M \times D)$ в нашем случае. В соответствии с этим определением пустое отношение переходит в пустое, а одноэлементное $\{\langle d;d\rangle\} \in S(Sch;D)$ переходит в двухэлементное $M \cdot \{\langle d;d\rangle\} = \{\langle(0;d);(0;d)\rangle;\langle(1;d);(1;d)\rangle\}$ диагональное подмножество в декартовом произведении $(M \times D)\times(M \times D)$.

Для геометрического представления множества состояний $S(Sch;M \times D)$ рассмотрим квадрат $(0;1]\times(0;1]$ (рис. 1). Каждая сторона этого квадрата разбивается на два полуинтервала – (0;1/2] и (1/2;1]. Тогда весь квадрат $(0;1]\times(0;1]$ разбивается на четыре меньших квадрата. В каждом квадрате выделяется «главная» диагональ.

Получается четыре диагонали, а в $(M \times D)\times(M \times D)$ также четыре элемента. При геометрическом представлении элементу $\langle(0;\mathrm{d});(0;\mathrm{d})\rangle$ ставится в соответствие диагональ ((0;0);(1/2;1/2)], элементу $\langle(0;\mathrm{d});(1;\mathrm{d})\rangle$ ставится в соответствие диагональ ((0;1/2);(1/2;1)], элементу $\langle(1;\mathrm{d});(0;\mathrm{d})\rangle$ ставится в соответствие диагональ ((1/2;0);(1;1/2)], элементу

$\langle(1;\mathrm{d});(1;\mathrm{d})\rangle$ ставится в соответствие диагональ ((1/2;1/2);(1;1)], а подмножеству элементов из $(M \times D) \times (M \times D)$ (состоянию базы данных) ставится в соответствие объединение диагоналей квадратов, соответствующих элементам этого подмножества. При этом масштаб длин выбирается так, чтобы длина диагонали ((0;0);(1;1)] всего квадрата была равна единице. Тогда расстояние между состояниями, определенное выше, будет равно длине симметрической разности соответствующих им подмножеств, составленных из диагоналей квадратов.

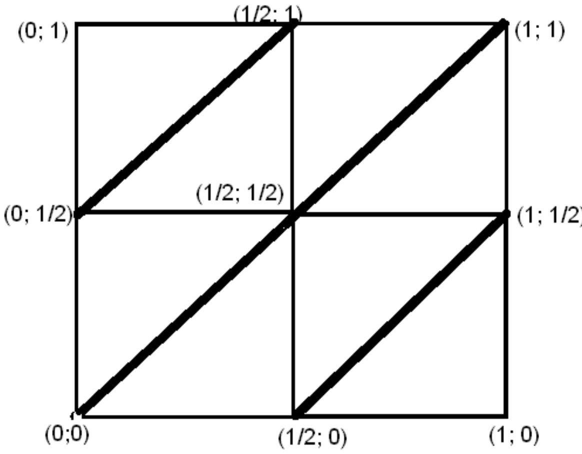

Рис. 1. Геометрическое представление $S(Sch; M \times D)$

Рассмотрим далее множество состояний $S(Sch; M^2 \times D)$ (рис. 2). Это множество всех бинарных отношений с доменом $M^2 \times D$ или множество всех подмножеств в декартовом произведении $(M^2 \times D) \times (M^2 \times D)$. Для геометрического представления множества состояний $S(Sch; M^2 \times D)$ рассмотрим тот же квадрат $(0;1] \times (0;1]$. Каждая сторона этого квадрата теперь разбивается на четыре равных полуинтервала, т.е. каждый полуинтервал в предыдущем представлении для $S(Sch; M \times D)$ разбивается пополам. Тогда весь квадрат $(0;1] \times (0;1]$ уже разбивается на 16 меньших квадратов. В каждом квадрате также выделяется главная диагональ. Во множестве $(M^2 \times D) \times (M^2 \times D)$ также 16 элементов, и при геометрическом представлении каждому элементу $\langle(\varepsilon_2^1, \varepsilon_1^1, d); (\varepsilon_2^2, \varepsilon_1^2, d)\rangle \in (M^2 \times D) \times (M^2 \times D)$ ставится в соответствие свой диагональный полуинтервал, соединяющий точки с координатами (t^1, t^2) и $(t^1 + (1/4), t^2 + (1/4))$, где $t^1 = \varepsilon_1^1/2 + \varepsilon_2^1/2^2$; $t^2 = \varepsilon_1^2/2 + \varepsilon_2^2/2^2$; и $\varepsilon_1^1, \varepsilon_2^1, \varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2 \in M = \{0;1\}$.

Тогда отображению умножения $M \cdot : S(Sch, M \times D) \to S(Sch; M^2 \times D)$ в геометрическом представлении соответствует, как нетрудно видеть, вложение одного представления в другое.

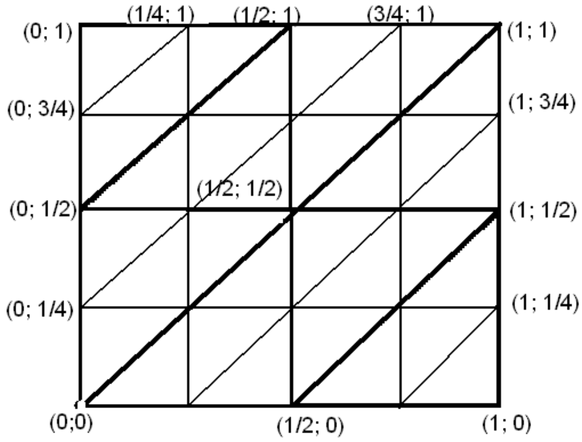

Рис. 2. Геометрическое представление $S(Sch, M^2 \times D)$

Аналогичные картинки получаются для $S(Sch, M^n \times D)$ и отображений $M \cdot : S(Sch, M^n \times D) \to S(Sch; M^{n+1} \times D)$.

В пределе при $n \to \infty$ получим, что геометрическому представлению обобщенного состояния в нашем случае соответствует подмножество в диагональной штриховке квадрата $(0;1] \times (0;1]$, которое может быть получено конечными объединениями отрезков, соединяющих точки с координатами вида (t^1, t^2) и $(t^1 + (1/2^n), t^2 + (1/2^n))$, где $t^i = \varepsilon_1^i/2 + ... + \varepsilon_n^i/2^n$; $\varepsilon_1^i, ..., \varepsilon_n^i \in M = \{0;1\}$; для $i \in \{1,2\}$ и натуральных чисел *n*.

Пополнение этого пространства дает геометрическое представление полного пространства обобщенных состояний схемы базы данных для схемы, состоящей из бинарного отношения.

Эту конструкцию легко обобщить на случай, когда в доменах D_{a_1} и D_{a_2} атрибутов a_1 и a_2 не по одному элементу. По аналогии, для геометрического представления пространства обобщенных состояний схемы базы данных с одним бинарным отношением строим прямоугольник размером $|D_{a_1}|$ на $|D_{a_2}|$, разбитым на клетки, соответствующие парам $\langle d_i, d_j\rangle \in D_{a_1} \times D_{a_2}$. Тогда в геометрическом представлении каждой строке $\langle d_i, d_j\rangle$ соответствует диагональ в своей клетке. Длина диагонали в каждой клетке принимается равной единице. Для представления $(M \times D_{a_1}) \times (M \times D_{a_2})$ каждая клетка дробится на более мелкие прямоугольные клетки, разбивая каждую сторону исходной клетки на |M| равных частей. В каждой мелкой клетке берутся главные диагонали, которые ставятся во взаимно однозначное соответствие с элементами множества $(M \times D_{a_1}) \times (M \times D_{a_2})$. Аналогичные построения делаются для $(M^n \times D_{a_1}) \times (M^n \times D_{a_2})$ при $n \in N$. Объединение множеств таких диагоналей при для всех $n \in N$ обозначим через $Diag(|D_{a_1}|,|D_{a_2}|,|M|)$ и будем называть диагональной штриховкой прямоугольника. Это подмножество в прямоугольнике дает основу для геометрического представления метрического пространства обобщенных состояний базы данных.

Каждое обобщенное состояние $\widetilde{s} \in \widetilde{S}(Sch, M, D)$ по определению является состоянием $\widetilde{s} \in S(Sch, M^n \times D)$ для некоторого *n* и, следовательно, для схемы базы данных, заданной одним бинарным отношением, является подмножеством строк $\widetilde{s} \subset (M^n \times D_{a_1}) \times (M^n \times D_{a_2})$ в $(M^n \times D_{a_1}) \times (M^n \times D_{a_2})$. Геометрическим представлением обобщенного состояния $\widetilde{s}$ является подмножество в диагональной штриховке $Diag(|D_{a_1}|,|D_{a_2}|,|M|)$. Это подмножество строится объединением конечного числа диагоналей в диагональной штриховке для диагоналей, соответствующих строкам, входящим в $\widetilde{s}$. При этом расстояние $\rho(\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2)$ между обобщенными состояниями, заданное определением 7, равно длине симметрической разности подмножеств в диагональной штриховке прямоугольника, соответствующих геометрическому представлению $\widetilde{s}_1$ и $\widetilde{s}_2$.

Пополнение этого пространства конечных диагональных подмножеств в множестве $Diag(|D_{a_1}|,|D_{a_2}|,|M|)$ по метрике, равной мере симметрической разности таких подмножеств, дает изометричное геометрическое представление полного пространства обобщенных состояний схемы базы данных для схемы, состоящей из одного бинарного отношения. Элементам этого пополненного пространства являются произвольные (с точностью до подмножеств меры 0) измеримые подмножества конечной меры в $Diag(|D_{a_1}|,|D_{a_2}|,|M|)$.

Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

<u>Теорема 3.</u> *Если схема базы данных Sch состоит из одного бинарного отношения, и нет ограничений целостности базы данных, то полное пространство обобщенных состояний* $\hat{S}(Sch; M, D)$ *схемы базы данных Sch изометрично пространству* $I(Diag(|D_{a_1}|,|D_{a_2}|,|M|))$ *измеримых подмножеств в диагональной штриховке* $Diag(|D_{a_1}|,|D_{a_2}|,|M|)$, *заданных с точностью до подмножеств меры 0, и с расстоянием между подмножествами, равным мере симметрической разности подмножеств.*

Аналогичные рассуждения можно провести и для случая, когда схема базы данных состоит из одного *k*-арного отношения, т.е. $Sch = \{R(a_1,...,a_k)\}$. В этом случае для геометрического представления обобщенных состояний схемы базы данных вместо прямоугольника нужно взять *k*-мерный параллелепипед, *i*-я сторона которого разделена на $|D_i|$ равных отрезка. Через концы отрезов проведены перпендикулярно отрезкам гиперплоскости. В результате параллелепипед разбивается гиперплоскостями на $|D_{a_1}| \times ... \times |D_{a_k}|$ равные ячейки – параллелепипеды меньших размеров. Предполагается, что диагонали ячеек равны 1. Вместо диагональной штриховки $Diag(|D_{a_1}|,|D_{a_2}|,|M|)$ в прямоугольнике берем диагональную штриховку $Diag(|D_{a_1}|,...,|D_{a_k}|,|M|)$ в *k*-мерном параллелепипеде размерами $|D_{a_1}| \times ... \times |D_{a_k}|$. Штриховка является объединением всех отрезков, соединяющих точки $(t^1,...,t^k)$ и $(t^1 + (1/|M|^n),...,t^k + (1/|M|^n))$, где

$$t^i = \varepsilon_0^i + \frac{\varepsilon_1^i}{|M|} + ... + \frac{\varepsilon_n^i}{|M|^n};$$

ε_0^i – целое число от 0 до $|D_i| - 1$;

$$\varepsilon_1^i,...,\varepsilon_n^i \in \{0,1,...,|M|-1\};$$

для $i = 1,...,k$ и $n \in N$.

Таким образом, можно сформулировать более общую теорему.

<u>Теорема 4.</u> *Если схема базы данных* $Sch = \{R(a_1,...,a_k)\}$ *состоит из одного k-арного отношения, и нет ограничений целостности, то полное пространство обобщенных состояний* $\hat{S}(Sch; M, D)$ *схемы базы данных Sch изометрично пространству* $I(Diag(|D_{a_1}|,...,|D_{a_k}|,|M|))$ *измеримых подмножеств в диагональной штриховке* $Diag(|D_{a_1}|,...,|D_{a_k}|,|M|)$ *k-мерного параллелепипеда* $|D_{a_1}| \times ... \times |D_{a_k}|$, *заданных с точностью до подмножеств меры 0, и с расстоянием между подмножествами, равным мере симметрической разности подмножеств.*

В заключение этого раздела сформулируем утверждение, легко следующее из определений.

<u>Теорема 5.</u> *Если схема базы данных Sch является объединением двух непересекающихся подсхем Sch' и Sch'', то каждое состояние схемы Sch задается состояниями ее подсхем Sch' и Sch''. Более того, метрическое пространство состояний* $\hat{S}(Sch; M, D)$ *изометрично декартовому произведению пространств* $\hat{S}(Sch'; M, D)$ *и* $\hat{S}(Sch''; M, D)$ *с метрикой на декартовом произведении, равной сумме метрик на сомножителях.*

* * *

В настоящей работе удалось заметить, что обычные ограничения целостности в реляционных базах данных обладают свойством однородности. Это свойство позволяет «раздувать» состояния баз данных, увеличивая число записей в базе данных, по существу не меняя самого состояния. Это позволило ввести метрику между состояниями так, что пространство обобщенных состояний схемы базы данных стало полным метрическим пространством, которое является замкнутым подпространством в метрическом пространстве обобщенных состояний схемы базы данных с теми же схемами отношений, но без ограничений целостности.

В статье сделана попытка изучить топологию метрических пространств состояний свободных схем баз данных (схем баз данных без ограничений целостности).

Целью дальнейших исследований в этом направлении является изучение топологии пространства состояний реляционных схем баз данных с различными видами ограничений целостности. Для исследования топологии этих пространств могли быть привлечены развитые методы алгебраической топологии [4]. Это позволило бы строить новые алгебраические инварианты схем баз данных в направлении, отличном от [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мейер Д. Теория реляционных баз данных. – М.: Мир, 1987.
2. Бениаминов Е.М. Алгебраические методы в теории баз данных и представлении знаний. – М.: Научный мир, 2003.
3. Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. Курс метрической геометрии. – Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2004.
4. Вик Дж. У. Теория гомологий. Введение в алгебраическую топологию. – М.: МЦНМО, 2005.
5. Beniaminov E.M. Algebraic Invariants of Database Schemes // Proceedings of the Second International Workshop on Advances in Databases and Information Systems (ADBIS'95). – 1995. – Vol. 1. – P. 259-263. – URL:http://beniaminov.rsuh.ru/ Adbis.pdf (дата обращения: 15.10.2015).

Материал поступил в редакцию 20.10.15.

Сведения об авторе

БЕНИАМИНОВ Евгений Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Российского государственного гуманитарного университета, Москва
E-mail: ebeniamin@yandex.ru